Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-11

Om $t \to \vec{r}(t)$ är en funktion från $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ så kan vi definiera dess derivata:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Om gränsvärdet existerar och är egentligt. Eftersom vi kan beräkna gränsvärden komponentvis (se förra föreläsningen) kan vi också beräkna derivatan komponentvis.

Exempel: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t),\ \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

En kurva definierad (parametriserad) av en deriverbar funktion $\vec{r}(t)$ kallas en deriverbar kurva. Som bekant kan vi beräkna längden av en sådan kurva genom att integrera:

$$\textit{Längden}: \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Exempel/övning: *Låt* $\vec{r}(t) = (1,0,2) + t(1,1,0)$ *och beräkna längden av linjestycket mellan punkterna* $(1,0,2)$ *och* $(3,2,2)$.

Lösning:

$$(1,0,2) \textit{ svarar mot } t=0, \quad (3,2,2) \textit{ svarar mot } t=2.$$

$$\vec{r}\,'(t) = (1,1,0) \textit{ eftersom } D(t(1,1,0)) = D(t,t,0) = (1,1,0)$$

$$\int_0^2 |(1,1,0)|\,dt = \int_0^2 \sqrt{1^2+1^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{2}\,dt = \left[\sqrt{2}\,t\right]_0^2 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\textit{Svar: Linjestyckets längd är } \sqrt{8}.$$

Om $\vec{r}(t)$ är en deriverbar kurva så ger $\vec{r}\,'(t)$ en tangentvektor.

Definition: En mängd kallas för *sammanhängande* om varje par av punkter i mängden kan förbindas med hjälp av en kurva som ligger i mängden.

Exempelvis en cirkelskiva är sammanhängande, för vi kan alltid dra en linje mellan två punkter. Också en cirkelskiva med ett hål i är sammanhängande, för vi kan låta kurvan gå runt hålet. Har vi däremot en mängd bestående av två separata cirkelskiver är den inte sammanhängande (intuitivt väldigt tydligt i 2d).

Exempel/övning:

Vilka av följande mängder är sammanhängande?

$a: \{(x,y);\ x^2 - y^2 = 3\}$

$b: \{(x,y,z);\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 3\}$

$c: \mathbb{R}^n$

$d: \mathbb{Z}$

Lösning:

$a:$ Nej (*hyperbel, två separata kurvor*)

$b:$ Ja (*en sfär med en hålighet i mitten*)

$c:$ Ja (*uppenbart?*)

$d:$ Nej (*diskreta punkter, ej kontinuerlig*)

Härnäst skall vi titta på funktioner av typen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dvs som går från flera variabler till en.

Definition: En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har *gränsvärde* A när $\vec{x} \to \vec{a}$ om det gäller för varje kurva $\vec{x}(t)$ med $\lim_{t \to c} \vec{x}(t) = \vec{a}$ att $\lim_{t \to c} f(\vec{x}(t)) = A$.

Definition: En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sägs vara *kontinuerlig* i en punkt $\vec{a}$ om $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Definition: För funktioner av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan man definiera gränsvärden genom $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}| = 0$.

Exempel: *Avgör om gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *existerar eller ej.*

Lösning:

$$x=0: \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \qquad y=0: \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Alltså existerar gränsvärdet inte eftersom vi fick olika värden.

Exempel/övning: *Avgör om gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *existerar eller ej.*

Lösning:

$$x=0: \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \qquad y=0: \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$y=kx: \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(k)}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Alltså existerar inte gränsvärdet, för k kan anta andra värden än 0.

Observera: Det finns fler sätt att bevisa att ett gränsvärde inte finns! Den enda slutsats man kan dra av testen ovan är alltså att gränsvärdet *inte* existerar.

Att $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0$ och $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0$ innebär alltså *inte* att gränsvärdet existerar.

Om vi däremot vet att alla gränsvärden existerar så vet vi att de är *lika*.

Exempel: *Avgör om gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2-xy}$ *existerar.*

Ansätter vi här $y = kx$ *kommer vi alltid att få x i svaret:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(kx)^3}{x^2+(kx)^2-kx^2} = 0$$

Så kanske *existerar gränsvärdet.*

Lösning:

Vi inför polära kordinater: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi:$

$$\frac{y^3}{x^2+y^2-xy} = \frac{r^3\sin^3\varphi}{r^2 - r^2\cos\varphi\sin\varphi} = r\frac{\sin^3\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin(2\varphi)} \le 2r$$

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2-xy}\right| \le 2(x^2+y^2) \quad \textit{så gränsvärdet blir } 0.$$

$$\textit{Svar: Gränsvärdet existerar och är } 0.$$

Begreppsuppgift: Cirkeln, sfären, paraboloiden är exempel på "snälla och trevliga" ytor. Kan vi formulera "snäll och trevlig" på något bra sätt? Vilka typer av ytor tycker vi om?

Krav för godkänt: Att ert kriterium täcker cirklar och sfärer.

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se