Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-09

Kommentar till KS1, rosa lapp uppg 2:

Vad svarar ekvationen $3x^2+2xy-2y^2=1$ *mot geometriskt ?*

$$K=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow D_K=\begin{pmatrix}1/2+\sqrt{29}/2 & 0\\ 0 & 1/2-\sqrt{29}/2\end{pmatrix}$$

Egenvärdena har olika tecken , så vi har en ellips. Men : $\det(K)=\det(D_K)=-7$
Så vi skulle kunnat se därigenom att egenvärdena hade olika tecken , det hade varit tillräckligt att undersöka determinanten av K.

Kommentar till vit lapp uppg 3:
Många inverterade transformationsmatrisen, detta var inte nödvändigt, eftersom
$\vec{x}_{gamla}=C\,\vec{x}_{ny}$ *där C är de nya basvektorerna uttryckta i den gamla basen*
så egentligen hade det räckt med att multiplicera.

I övrigt gick det bra på kontrollskrivningen, 44/60 skrivande fick 2 poäng eller mer.
För de som har 7p på momentet finns möjlighet att komplettera.

Denna föreläsning börjar vi med funktioner i flera variabler, vilket togs upp på begreppsuppgiften.

Exempel (Graphing Calculator):

$z=\sin(x+y)$ (yta med pucklar), $z=\sin(x^2+y^2)$ (vågig yta), $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$ (cirkel),
$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{bmatrix}$ (spiral), $x^2+y^2=3$ (cirkel), $x^2+y^2+z^2=2$ (klot),
$x^2+y^2-z^2=3$ (hyperboloid), $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ (koordinattransformation).

Bra att veta: Notationen "x'" i Graphing Calculator ger uppritning i ett nytt fönster.

ϵ*−omgivning till en punkt* $\vec{a}$ *: Alla punkter på avstånd högst* ϵ *från* $\vec{a}$ *:* $\{\vec{x}\ \in\ |\vec{x}-\vec{a}|<\epsilon\}$

Om vi har punkter och ett område kan vi kalla en punkt utanför området för en "yttre punkt", en innanför området en "inre punkt" och en punkt på områdets gräns kallar vi en "randpunkt". En punkt är en randpunkt om vi inte kan hitta en omgivning till punkten som helt ligger antingen inom eller utom området, hur liten omgivning vi än väljer.

Definition: En mängd kallas *öppen* om alla dess punkter är inre punkter. En mängd kallas *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

Exempel: $(0,3)$ *givet* $x\in(0,3)$, *finns* $\epsilon>0,\ (x-\epsilon, x+\epsilon)\subseteq(0,3)$*?*
Ta $\epsilon=\min\left(\frac{|x-0|}{2},\frac{|x-3|}{2}\right)$. *Om* $\epsilon>0$ *är mängden öppen.*

Exempel: $[0,3]$ *är en sluten mängd , randpunkterna är* $x=0,\ x=3$.

Exempel: $(0,3]$ *0 är en randpunkt som inte tillhör mängden , alltså inte sluten.*
Den är heller inte öppen eftersom $x=3$ *inte är en inre punkt.*

Definition: En mängd kallas *begränsad* om den upptar en begränsad del av planet, rummet, etc. Vi kan visa att en mängd är begränsad genom att innesluta den i en större mängd som vi vet är begränsad, t ex ett klot centrerat i origo.

Exempel: $[5,6]$ *är begränsat , för* $(-7,7)\subseteq[5,6]$.

Exempel: *Är ytan* $x^2+y^2=z$ *begränsad ? Nej , för x , y kan ta godtyckliga värden.*
Vi kan se detta genom att rita ytan , vilket ger en paraboloid.

Definition: En mängd som är sluten och begränsad kallas *kompakt.*

Exempel: $\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$ *(enhetssfären) är en kompakt mängd.*

Exempel: $\{(x,y,z);\ |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1\}$ *(en kub) är kompakt.*

"Kompakta mängder är motsvarigheten till slutna och begränsade intervall."

Funktioner av typ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$: Funktioner som tar ett värde och ger värden i flera variabler.

Vi kan titta på kurvan $y=x^2$ som funktionen $t\to(t,t^2)$:
När $x\to 1$ går $y\to 1$, så när $t\to 1$ går $(t,t^2)\to(1,1)$.
$t\to(x(t),y(t))\quad t\to 1\ \Rightarrow\ x(t)\to 1,\ y(t)\to 1.$

Om vi skriver det som en vektor får vi att: $|(x(t),y(t))-(1,1)|\to 0$ *när* $t\to 1$.
$|(x(t)-1,\ y(t)-1)|=\sqrt{(x(t)-1)^2+(y(t)-1)^2}\to 0$ *när* $t\to 1$.

Det kan inträffa att $|(x(t),y(t))|\to\infty$ men $x(t)$ eller $y(t)$ saknar gränsvärde, som i exemplet $t\to(t,\sin t)$: $\lim_{t\to\infty}|(x(t),y(t))|=\infty$, men $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar inte.

Definition:
$$\lim_{t\to a}\vec{x}(t)=\vec{c}\quad om\quad \lim_{t\to a}|\vec{x}(t)-\vec{c}|=0$$
$$\lim_{t\to a}\vec{x}(t)=\infty\quad om\quad \lim_{t\to a}|\vec{x}(t)|=\infty\ .$$

Exempel/övning:
Bestäm $\lim_{t\to 3}\left(\cos\frac{3t\pi}{2},t^2,1\right)$.
$\cos\frac{9\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad 3^2=9,\quad$ *Svar :* $(0,9,1)$.

Definition (kontinuitet): En funktion $t\to\vec{x}(t)$ är kontinuerlig i $t=a$ om $\lim_{t\to a}\vec{x}(t)=\vec{x}(a)$.

Exempel: $t\to\left(\cos\frac{3t\pi}{2},t^2,1\right)$ är kontinuerlig, för komponenterna är kontinuerliga funktioner.

Exempel/övning: *Funktionen* $t\to(\sin t,|t|,4+t)$ *är kontinuerlig för komponenterna är kontinuerliga funktioner.*

Exempel/övning: *Funktionen* $t\to\begin{Bmatrix}(1+t,t^2) & t>0\\ (\cos t,0) & t\le 0\end{Bmatrix}$ *är kontinuerlig för* $\begin{Bmatrix}\cos 0=1+0\\ 0=0^2\end{Bmatrix}$.

Slut för idag / it03_wsv@it.kth.se