Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-04

Andragradskurvor i planet:
Vi har något uttryck av typen $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.
Där $A, B, C \neq 0$ (för är alla tre noll har vi inte en kurva, utan en linje).

Vi börjar med att anta att $B=0$, vilket ger: $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Annat fall: $A, C \neq 0$. Vi kvadratkompletterar: $A\left(x^2+2\frac{D}{A}x\right)+C\left(y^2+2\frac{E}{C}y\right)+F=0$

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}+F=0$$

$$\textit{Variabler:}\quad \xi=x+\frac{D}{A},\quad \eta=y+\frac{E}{C},\quad G=-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}+F$$

$$\textit{Ger:}\quad A\xi^2+C\eta^2+G=0$$

Om $A, C>0$ och $G<0$ ger detta en ellips.
Om $A, C>0$ och $G>0$ finns det inga punkter som uppfyller ekvationen.
Om $A>0$, $C<0$ får vi en hyperbel.

Har vi ett utseende av typen $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ (en ellips) så är *a* ellipsens radie i x-led och *b* ellipsens radie i y-led. Vi får alltså information om ellipsens utseende av dessa konstanter.

Har vi istället $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ vilket ger en hyperbel (har formen “) (“ för den som inte vet) så ger *a* oss den “inre” radien och $y=\frac{bx}{a}$ ger oss en linje från origo som visar parabelns bågars form. Har vi samma ekvation som ovan med med svaret -1 är hyperbeln vriden 90 grader.

För $A\xi^2+C\eta^2=0$ gäller att om *A* och *C* har samma tecken så är det bara punkten $(\xi,\eta)=(0,0)$ som uppfyller ekvationen. Om *A* och *C* har olika tecken får vi:

$A\xi^2=(-C)\eta^2 \;\Rightarrow\; \xi=\pm\sqrt{\frac{-C}{A}}\eta$ vilket ger två korsande linjer “X”. Obs att $\frac{-C}{A}>0$.

Nytt fall: $A\neq 0,\ C=0$ ger: $Ax^2+2Dx+2Ey+F=0$ som kvadratkompletteras, vilket ger en ekvation på formen $A\xi^2+2Ey+G=0 \quad (E\neq 0) \;\Rightarrow\; y=-\frac{A}{2E}x^2-\frac{G}{2E}$ (en parabel).

Skulle E vara lika med 0 får vi bara $A\xi^2+G=0$, vilket ger oss en rak linje (eller inga punkter).

Om $B\neq 0$ får vi $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ vilket kan uttryckas med matriser som:

$$\vec{x}^T K\vec{x}=(x,y)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}Ax+By\\ Bx+Cy\end{pmatrix}=Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

Vi vill nu reducera detta till det tidigare $(B=0)$ genom att diagonalisera K:
$\vec{x}_e^T K_e\vec{x}_e=\vec{x}_f^T=C^T K_e C\vec{x}_f,\quad C^T K_e C=K_f$.

Nu vill vi hitta en bas *f* så att K_f blir en diagonalmatris. Vi vill alltså hitta egenvärden och bilda (ortonormerade) egenvektorer som bildar den nya basen. Vektorerna måste vara ortonormerade eftersom vi använde transponat istället för invers ovan.

$$x^2+2xy=3 \quad\Rightarrow\quad K=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Exempel/övning: $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-1=\lambda^2-\lambda-1 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta^2=3 \quad (\textit{en vriden hyperbel.})$$

Exempel/övning:

Vad representerar $x^2-2xy+2y^2-2y-3=0$ *geometriskt?*

$$\vec{x}_e^T\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\vec{x}_e+2(0,-1)\vec{x}_e-3=0$$

$$\vec{x}_f^T K_f\vec{x}_f+2\vec{l}_f^T\vec{x}_f-3=0,\quad \vec{l}_e^T\vec{x}_e=\vec{l}_e^T C\vec{x}_f=\left(C^T\vec{l}_e\right)^T\vec{x}_f \Rightarrow \vec{l}_f=C^T\vec{l}_e$$

$$\textit{Egenvärden:}\quad \lambda_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1:\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1\\ -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad \textit{ger}\quad \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2:\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1\\ -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad \textit{ger}\quad \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

$$C^T\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\ \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\quad (\alpha,\beta\ \textit{norm.faktorer})$$

$$\textit{Vi får}\quad \vec{l}_f=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\ \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\end{pmatrix}\quad \textit{vilket ger oss ekvationen:}$$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi+\frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta\right)-3=0$$

(Det återstår att kvadratkomplettera, resultatet blir en ellips.)

Andragradsytor: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$ (hurra!)

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+2(G,H,I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+J=0$$

På matrisform:

$$K_e=\begin{pmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{pmatrix},\quad \vec{l}_e^T=(G,H,I).$$

Vi får samma ekvation som tidigare: $\vec{x}_e^T K_e\vec{x}_e+2\vec{l}_e^T\vec{x}_e+J=0$!

Se boken sid 248-249 för olika former som dessa ytor kan ta sig! Observera att vi inte förväntas kunna samtliga fall.

Hjälp för att komma ihåg det ovanstående: $\begin{array}{c|ccc} & x & y & z\\ \hline x & x^2 & xy & xz\\ y & xy & y^2 & yz\\ z & xz & yz & z^2\end{array}$. Blandade variabler delas med 2.

Exempel/övning:

Vad för slags yta representerar ekv. $5x^2-8xy+4y^2+8yz+3z^2+18x=3$?

$$\textit{Matris:}\quad K_e=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0\\ -4 & 4 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad \vec{l}_e^T=(9,0,0),\quad J=-3.$$

$$\textit{Egenvärden:}\quad 0=\begin{vmatrix}5-\lambda & -4 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 4\\ 0 & 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}\ \ldots\ \Rightarrow\ \begin{matrix}\lambda_1=?\\ \lambda_2=?\\ \lambda_3=?\end{matrix}$$

Slut på tid. Men resultatet är en timglasformad figur.

Slut för idag / it03_wsv@it.kth.se