Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-19

Fortsättning repetition (sista föreläsningen!)

Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering:

$$2x^2+2xy+2y^2=1 \quad \Leftarrow \quad \text{vad är det här?}$$

för att försöka förstå oss på en sådan här funktion, ombildar vi den först till *huvudaxelform.*

$$2x^2+2xy+2y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

Vi kallar matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ för K och *diagonaliserar* den.

$$\text{Egenvärden:}\quad 0=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3 \quad\Rightarrow\quad lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$$

Den diagonaliserade matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ger $\xi^2+3\eta^2=1$ vilket är en *ellips.*

Huvudaxlarnas riktningar ges av *egenvektorerna :*

$$\lambda=1:\ \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=3:\ \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Om vi har linjära termer $2\vec{l}^{\,T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ måste vi transformera till $2\left(C^T\vec{l}\right)^T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Stationära punkter:

$$\text{Kandidat:}\quad \text{grad } f(x,y)=(0,0)$$

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{max:}\quad \det H>0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0 \\ \text{min:}\quad \det H>0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0 \end{matrix}$$

$$\text{sadelpunkt:}\quad \det H<0$$

$$\text{vet ej:}\quad \det H=0$$

Exempel:

$$\text{grad } f(0,0)=(0,0) \ \Rightarrow\ \text{origo är en stationär punkt.}$$

$$f=x^2+y^2 \ \Rightarrow\ \text{origo är en minpunkt, ty } H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \det H>0,\quad 2>0.$$

$$f=-x^2-y^2 \ \Rightarrow\ \text{origo är en maxpunkt, ty } H=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ \det H>0,\quad -2<0.$$

$$f=x^2-y^2 \ \Rightarrow\ \text{origo är en sadelpunkt, ty } H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ \det H<0.$$

Taylorutveckling:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)+$$
$$O\left(\|(x-a,y-b)\|^3\right)$$

Vilket kan förenklas:

$$f(x,y)=f(a,b)+\text{grad } f(a,b)\cdot(x-a,y-b)+$$
$$\frac{1}{2}\left((x-a,y-b)H(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right)+O\left(\|(x-a,y-b)\|^3\right)$$

Om (a,b) är en stationär punkt är $\text{grad } f=0$ så utseendet bestäms av $H.$

Första ordningens taylorutveckling:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+O\left(\|(x-a,y-b)\|^2\right)$$

Planet som ges av taylorutvecklingen är tangentplanet till grafen $f(x,y)$ över punkten $(x,y)=(a,b)$.

I en variabel:

$$y=f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+O(R) \quad \text{tangentlinje.}$$

Vi kan se grafen $z=f(x,y)$ som en nivåyta i rummet $F(x,y,z)=0$ där $F(x,y,z)=f(x,y)-z$. Normalen till nivåytan ges av $\text{grad } F.$

$$\text{grad } F=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right).$$

Tangentplanet blir $\text{grad } F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$

$$\text{dvs}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)\cdot(x-a,y-b,z-c)=$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)-\left(z-f(a,b)\right) \ \Leftrightarrow$$
$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-b).$$

Som parameteryta: $\vec{r}(x,y)=\left(x,y,f(x,y)\right):$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right).$$

Tydligen är det här samma normal som vi fick tidigare, pekande i motsatt riktning.

Regulär yta/kurva:

$$\text{Regulär yta:}\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\neq\vec{0}$$

$$\text{Regulär kurva:}\quad \vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$$

Exempel:

Enhetscirkeln är regulär, ty

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t) \ \Rightarrow\ \vec{r}\,'(t)=(-\sin t,\cos t)\neq(0,0).$$

Nivåytor:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$$

Vi vill se nivåytan som en graf: $z=z(x,y)$.

$$\text{Det går så länge}\quad \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0 \ \Leftrightarrow\ z\neq 0.$$

$$x^2+y^2+z^2(x,y)=1 \quad \text{ger} \quad 2x+2z(x,y)z_x'(x,y)=0$$

(Se Smartboardanteckningarna för mer info.)

Inversa funktioner:

Låt $\vec{f}:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ vara differentierbar: $\vec{f}(\vec{r})\approx\vec{f}(\vec{r}_0)+J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)\vec{r}$

Så f har lokal differentierbar invers nära r_0 om den linjära avbildningen $\vec{r}\rightarrow J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)\vec{r}$ är inverterbar, dvs om $\det J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)\neq 0.$

Derivator, exempel:

$$g(t)=(t,t^2),\quad f(x,y)=xy.$$

$$\text{Kedjeregeln:}\quad \frac{d}{dt}\left(f\circ g(t)\right)=J_f\left(g(t)\right)J_g(t)$$

$$J_g(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix},\quad J_f\left(g(t)\right)=\text{grad } f\left(g(t)\right)=(t^2,t)$$

$$\text{så}\quad \frac{d}{dt}\left(f\circ g(t)\right)=(t^2,t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}=3t^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\circ g(t)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(t)\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(t)\right)\frac{dy}{dt}=\text{grad } f\left(g(t)\right)\cdot g'(t)$$

Låt $h(x,y)=g\left(f(x,y)\right)$ och bestäm $J_h(x,y)$.

$$J_h(x,y)=J_g\left(f(x,y)\right)J_f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2f(x,y) \end{pmatrix}(y,x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2xy \end{pmatrix}(y,x)=\begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

Taylorutveckling, exempel:

Taylorutveckla $f(x,y)=e^{xy}$ i $(1,2)$ till 2:a ordningen.

Lösning:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+O(t^3) \ \Leftarrow\ (\text{detta kommer man förhoppningsvis ihåg})$$

$$x=1+h,\quad y=2+k$$

$$e^{xy}=e^{(1+h)(2+k)}=e^{2+k+2h+hk}=e^2e^{k+2h+hk}$$

Taylorutvecklingen blir:

$$e^2\left(1+(k+2h+hk)+\frac{(k+2h+hk)^2}{2}\right)+O\left(\|(h,k)\|^3\right)=$$
$$e^2+e^2k+e^22h+e^2\left(\frac{k^2}{2}+2h^2+3hk\right)+O\left(\|(h,k)\|^3\right)=$$
$$e^2+e^2(y-2)+2e^2(x-1)+\frac{e^2}{2}(y-2)^2+$$
$$2e^2(x-1)^2+3e^2(x-1)(y-2)+O\left(\|(x-1,y-2)\|^3\right).$$

Slut // it.ws83.net