Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-01-26

Hittills har vi sett på vektorer/punkter i planet ($\mathbb{R}^2$), i rummet ($\mathbb{R}^3$), nu skall vi se på dem i " $\mathbb{R}^n$ ". Istället för 2 eller 3 dimensioner har vi alltså *n* dimensioner.

Standardbas: Exempel: $\{(1,0),(0,1)\}\in\mathbb{R}^2$ Allmänt: $\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}\in\mathbb{R}^n$
En punkt eller ortsvektor skrivs: $(x_1,\ldots,x_n)$ (Det finns *n* koordinater)

Skalärprodukt: $(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Längd: $|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Vi kan visa att formeln för längd stämmer genom att konstatera att den i $\mathbb{R}^2$ ger precis Pythagoras sats: $c=\sqrt{a^2+b^2}$ - och denna kan vi ju bevisa sedan tidigare (eller hur...)

Att visa att formeln stämmer för $\mathbb{R}^1$ är elementärt, i högre dimensioner kan vi göra det genom att ta Pythagoras om och om igen. (Lämnas som övning åt läsaren...)

I $\mathbb{R}^n$ för *n* lika med 1 och 2 definierade vi skalärprodukten via vinkeln mellan vektorerna, men för *n* över tre har vi ingen bra "geometrisk intuition" men vi kan definiera vinkeln genom skalärprodukten:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$ dvs $\cos\varphi=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

För att kunna definiera vinkeln behöver vi veta att $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|$ (Cauchy-Schwarz' olikhet).
För att visa denna olikhet betraktar vi $t\vec{u}+\vec{v}$:

$$0\le|t\vec{u}+\vec{v}|^2=(t\vec{u}+\vec{v})\cdot(t\vec{u}+\vec{v})=t^2\,\vec{u}\cdot\vec{u}+2t\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=t^2|\vec{u}|^2+2t\,\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$$

För att hitta minimum deriverar vi och sätter derivatan lika med noll:

$$0=\frac{d}{dt}\left(|t\vec{u}+\vec{v}|^2\right)=2t|\vec{u}|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\ .$$

Vi sätter in detta i ursprungsformeln $|t\vec{u}+\vec{v}|^2$:

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^4}\cdot|\vec{u}|^2-2\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2}+|\vec{v}|^2\ge0\quad\Rightarrow\quad|\vec{v}|^2-\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2}\ge0\quad QED.$$

Mha detta kan vi visa *triangelolikheten*: $|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

Bevis:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=|\vec{x}|^2+2\,\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2\le$$
$$[Cauchy-Schwarz]\le|\vec{x}|^2+2\,|\vec{x}||\vec{y}|+|\vec{y}|^2=(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$$

Man kan allmänt säga att det vi kan från $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ funkar bra i $\mathbb{R}^n$ också.

Linjärt beroende: Två vektorer är parallella när de har samma riktning, dvs $\vec{u}\|\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=k\vec{v}$.
Så vi kan uttrycka $\vec{u}$ i termer av $\vec{v}$. De är linjärt beroende av varandra.

Definition: En uppsättning $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ av vektorer sägs vara linjärt beroende om
$c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\ldots+c_k\vec{v}_k=\vec{0}$ för ett icke-trivialt val av $c_1,\ldots,c_k$ (dvs, inte alla noll).

Om de inte är linjärt beroende säger vi att de är linjärt *oberoende*. (verkligen?)
Två parallella vektorer är alltid linjärt beroende av varandra.

Exempel: $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ är linjärt beroende, för vi kan välja $c_1=3,\ \ c_2=-1,\ \ c_3=-1$:
$3(1,1)-(1,2)-(2,1)=(3-1-2,\ 3-2-1)=(0,0)=\vec{0}$

Hur kom vi fram till det? I exemplet skrev vi egentligen: $c_1(1,1)+c_2(1,2)+c_3(2,1)=(0,0)$
vilket ger ett ekvationssystem: $\begin{cases}c_1+c_2+2c_3=0\\c_1+2c_2+c_3=0\end{cases}$ som ger matrisen: $\left\{\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&2&1&0\end{array}\right\}$.

Vi ser att vi får som mest oändligt många lösningar eftersom vi har tre obekanta men bara två matrisrader. Vi ser också att vi får som minst en lösning eftersom ekvationerna är homogena (vi kan inte få noll lösningar).

För att avgöra om $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ är linjärt oberoende eller inte så undersöker vi huruvida systemet $\left(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_k\middle|\vec{0}\right)$ (där vektorerna blir kolumner) har någon eller några icke-triviala lösningar.

Exempel: Undersök om $(1,1,2,0),(0,1,1,-1),(2,0,0,3)$ är linjärt oberoende eller ej.

Vi får matrisen: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\1&1&0&0\\2&1&0&0\\0&-1&3&0\end{array}\right)$ - och löser vi den ser vi att vektorerna är linjärt oberoende.

Sats: *k stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende om $k>n$.*

Bevis: *Systemet $\left(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_k\middle|\vec{0}\right)$ är då liggande (fler kolonner än rader i vänsterled) och liggande homogena system har alltid oändligt många lösningar.*

Definition: Om en uppsättning vektorer $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ som spänner upp $\mathbb{R}^n$, kallar vi uppsättningen för en *bas*. Att dessa vektorer *spänner upp* $\mathbb{R}^n$ innebär att en godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna: $\vec{u}=c_1\vec{v}_1+\ldots+c_k\vec{v}_k$.

Begreppsuppgift!
(1) Ge ett vardagsexempel på en funktion i flera variabler.
(2) Skriv någonting om derivata, i enkla termer.

Välj en.

Slut/it03_wsv@it.kth.se