Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-17

Repetition.

Linjärt oberoende:

En uppsättning vektorer $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_2\}$ sägs vara *linjärt oberoende* om ekvationen $c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$ bara har lösningen $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Om ekvationen har en annan lösning sägs vektorerna vara *linjärt beroende.*

Man kan lösa ekvationen genom att sätta upp en matris: $\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_k & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\end{array}\right)$

Om $k = n$, vektorernas längd kan detta testas mha en *determinant.*

Exempel:

Vilken punkt på linjen $x + y = 1$ ligger närmast origo?

Lösning:

Vi kan använda *Lagranges metod :*

Funktion att minimera: $f(x, y) = x^2 + y^2$, bivillkor: $g(x, y) = x + y - 1$

Lagranges metod säger att $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g$ eller så är $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ i minpunkten.

Men $\operatorname{grad} g = (1,1) \neq \vec{0}$ och $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$, vilket ger att

$$(2x, 2y) = \lambda(1,1) \Rightarrow x = y \Rightarrow (\textit{insatt i } g = 0) \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Svar: Punkten $x = y = \frac{1}{2}$ ligger närmast origo.

Alternativ lösning:

I det här fallet är antalet vektorer lika med antalet dimensioner, så vi kan räkna determinanten:

$$0 = \begin{vmatrix} \operatorname{grad} g \\ \operatorname{grad} f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x \Rightarrow x = y.$$

Mer om linjärt beroende:

Om $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}\}$ är linjärt beroende men $\{u_1, \ldots, u_k\}$ är linjärt beroende, kan man fråga sig hur $\vec{v}$ kan uttryckas som *linjärkombination* av $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$.

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_k\vec{u}_k \Leftrightarrow \left(\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_k \,\middle|\, \vec{v}\right).$$

Om vi har en uppsättning vektorer sådan att alla vektorer kan skrivas som linjärkombinationer av de vektorerna, kallas uppsättningen för en *bas.*

En bas där alla basvektorerna har längd 1 och är ortogonala kallas för en *ON - bas.* Vi kan byta bas med hjälp av *transformationer :*

$$\vec{x}_e = C\vec{x}_f$$

där:
- $\vec{x}_e$ koordinaterna i den gamla basen
- $\vec{x}_f$ koordinaterna i den nya basen
- C kolonnerna är f-basen uttryckt i e-basen.

Linjära avbildningar, exempel:

Bestäm avbildningsmatrisen, i standardbasen, som svarar mot projektion på linjen $y = x$.

Lösning:

Ritar vi projektionen grafiskt ser vi att $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ projiceras på samma linje, $A\vec{e}_1 = A\vec{e}_2$. Avbildningsmatrisen $A = (A\vec{e}_1, A\vec{e}_2)$.

Vi kan skriva att $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 - (\vec{e}_1 \cdot \hat{n})\hat{n} = (1,0) - \frac{1}{2}(1,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Då $\hat{n}$ är enhetsnormalen till linjen: $\hat{n} = \frac{(1,-1)}{|(1,-1)|}$.

Sats:

Om A tar en ON-bas till en annan, blir avbildningsmatrisen precis transformationsmatrisen mellan den ursprungliga basen och dess bild.

Transformering av linjära avbildningar, exempel:

Låt $\vec{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\vec{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

I $\vec{f}$-basen blir projektionen på linjen $y = x$ bara $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Om $\vec{y}_e = A_e\vec{x}_e \Leftrightarrow C\vec{y}_f = A_e C\vec{x}_f \Rightarrow \vec{y}_f = (C^{-1}A_e C)\vec{x}_f$ dvs $A_f = C^{-1}A_e C$.

Vilket ger $CA_f C^{-1} = A_e$.

För ON-basbyten har vi att $C^{-1} = C^T$, så:

$$A_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Avbildningsskala, exempel:

Låt A vara avbildningen med avbildningsmatris $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Då är avbildningsskalan $\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1$.

Differentierbarhet:

$$\vec{f}(\vec{r}) \approx \vec{f}(\vec{r}_0) + J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)$ är en linjär avbildning.

Exempel:

Beräkna $\iint_\Omega (x + y)\,dx\,dy$ då Ω begränsas av linjerna $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

Lösning:

Vi vill transformera området till en fyrkant för att få en lättare integral.

$$T^{-1} = \begin{Bmatrix} u = x + y \\ v = x - y \end{Bmatrix} \Rightarrow J_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} u \\ \operatorname{grad} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|\det J_T| = \frac{1}{|\det J_{T^{-1}}|} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$\iint_\Omega x + y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u\frac{1}{2}\,du\,dv = 0.$$

Polära koordinater, exempel:

Beräkna arean hos området begränsat av $(x-1)^2 + 2y^2 = 1$.

Lösning:

Vi går över till polära koordinater; $T: \begin{Bmatrix} x = \cos\varphi + 1 \\ y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$.

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_T| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\begin{matrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{matrix}\right\| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\iint_\Omega dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} |\det J_T|\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{2}}\,d\varphi\,dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Bra att veta: Matrisen för en sammansättning av linjära avbildningar är produkten av avbildningsmatriserna.

Cylinderkoordinater, exempel:

Beräkna volymen hos den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ där $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning:

$$-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{\ldots}}^{\sqrt{\ldots}} r\,dz\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^1 2r\sqrt{4 - r^2}\,dr = 2\pi\left[-\frac{2}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4\pi}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right).$$

$$\left(\textit{Svaret blir} > 0 \textit{ eftersom } 4^{\frac{3}{2}} > 3^{\frac{3}{2}}.\right)$$

Sfäriska koordinater (svåra att komma ihåg?)

$$\begin{Bmatrix} x = r\sin\Theta\cos\varphi \\ y = r\sin\Theta\sin\varphi \\ z = r\cos\Theta \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \Theta \leq \pi \end{matrix}$$

$$|\det J_T| = r^2\sin\Theta.$$

Exempel:

Beräkna volymen av ett klot med radien R.

Lösning:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi = \frac{R^3}{3}2\pi\int_0^{\pi}\sin\Theta\,d\Theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Ytintegral, exempel:

Beräkna flödet ut genom enhetssfären för fältet $\vec{F} = (x, y, z)$.

Lösning:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz.$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\iiint_K 3\,dx\,dy\,dz = 3\frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

Alternativ lösningsmetod:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \pm\iint \vec{r}(u, v)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

Där tecknet bestäms av om $\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)$ har samma eller motsatt riktning som $\hat{n}$ och $\vec{r}(u, v)$ är en *inverterbar* parametrisering av S.

Slut // it.ws83.net