Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-11

Sats:

Om fältet $\vec{F}$ är konservativt i ett område D, och $\vec{F}$ har kontinuerliga derivator, så är $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$.

Exempel:

$$\text{Låt } \vec{F}=\left(-\frac{z}{x^2+z^2},\,0,\,\frac{x}{x^2+z^2}\right) \text{ och bestäm } \operatorname{rot}\vec{F}.$$

Lösning:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{z}{x^2+z^2} & 0 & \frac{x}{x^2+z^2}\end{vmatrix}=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right),-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{x^2+z^2}\right),\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{x^2+z^2}\right)=$$

$$\left(0,-\frac{(x^2+z^2)-2x^2}{(x^2+z^2)^2}-\frac{(x^2+z^2)-2z^2}{(x^2+z^2)^2},0\right)=(0,0,0).$$

Exempel:

$$\text{Bestäm } \operatorname{rot}\vec{F} \text{ då } \vec{F}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y).$$

Lösning:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=(-1-1,\,-1-1,\,-1-1)=(-2,-2,-2).$$

Definition (enkelt sammanhängande):

$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ är inte enkelt sammanhängande.

$\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ är enkelt sammanhängande.

$\mathbb{R}^3\setminus\{x=0\}$ är inte enkelt sammanhängande.

$\mathbb{R}^3\setminus\{x^2+y^2+z^2\le 1\}$ är enkelt sammanhängande.

Detta beror på att vi i rummet kan gå "runt" den uteslutna punkten/kroppen genom att röra oss i något annat led, vilket vi inte kan i planet. Observera dock att man inte kan gå "runt" något som är oändligt långt, så rummet minus x-axeln (den tredje raden ovan) är inte enkelt sammanhängande.

Sats:

Om $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ i ett enkelt sammanhängande område D så är $\vec{F}$ konservativt i D.

Exempel:

Är fältet $\vec{F}=\left(2x\ln(x^2+y^2+z^2),\,2y\ln(x^2+y^2+z^2),\,2z\ln(x^2+y^2+z^2)\right)$ konservativt?

Lösning:

$\ln(0)$ är inte definierat, alltså är fältet inte definierat i origo, men överallt annars. $\mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\}$ är enkelt sammanhängande, så fältet är konservativt om $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$.

$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$, så fältet är konservativt.

(Att visa att rotationen av F är (0,0,0) ovan lämnas åt läsaren.)

Integraler av masstyp, definition:

Om Γ är en regulär kurva i $\mathbb{R}^3$ och $f(\vec{r})$ är en funktion av typ $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, styckvis kontinuerlig på Γ, så är

$$\int_\Gamma f(\vec{r})\,ds=\int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

där $\vec{r}(t)$, $a\le t\le b$, är någon inverterbar parametrisering av Γ.

Ytintegraler av masstyp, definition:

Om S är en regulär yta i $\mathbb{R}^3$ och $f(\vec{r})$ är en funktion av typ $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, styckvis kontinuerlig på S, så är

$$\iint_S f(\vec{r})\,d\sigma=\iint_D f(\vec{r}(u,v))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|du\,dv$$

där $\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ är någon inverterbar parameterframställning av S.

Det är viktigt att integralerna inte skall bero av parameterframställningen, därav kravet på inverterbarhet.

Vi kan se flödesintegraler som ytintegraler av masstyp:

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot(\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma)=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,du\,dv=$$

$$\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|}\cdot\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|du\,dv=\iint_S\left(\vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\right)d\sigma.$$

Exempel:

Beräkna flödet $\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma$ då $\vec{F}(\vec{r})=\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$, $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ och $\hat{n}(\vec{r})$ är den utåtriktade normalen, dvs $\hat{n}(\vec{r})=\hat{r}$.

Lösning:

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})=\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}\cdot\hat{r}=\frac{1}{|\vec{r}|^2},\text{ så vi ska beräkna } \iint_S\frac{1}{|\vec{r}|^2}\,d\sigma.$$

$$\iint_S\frac{1}{|\vec{r}|^2}\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint_S d\sigma=\frac{1}{R^2}4\pi R^2=4\pi.$$

Eftersom vi kan se att *S* är en sfär med radien *R*, kan vi direkt se att längden på *r* är *R* för alla punkter på sfären, och således konstant. Integralen blir då av sfärens volym, som vi ju också kan ekvationer för sedan tidigare.

Exempel:

Beräkna $\int_\Gamma f(\vec{r})\,ds$ då $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ och Γ är linjestycket mellan $(0,0,1)$ och $(1,1,1)$.

Lösning:

$$\text{Enl. tidigare: } \int_\Gamma f(\vec{r})\,ds=\int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

$$\vec{r}(t)=(0,0,1)+t(1,1,0)=(t,t,1),\quad 0\le t\le 1\quad\Rightarrow\ |\vec{r}\,'(t)|=|(1,1,0)|=\sqrt{2}.$$

$$\int_0^1(2t^2+1)\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\left[2\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}+1\right).$$

Exempel:

Beräkna $\iint_S|\vec{r}|^2\,d\sigma$ då S är cylindern $(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le z\le 1$.

Lösning:

$$\text{Enl. tidigare: } \iint_S|\vec{r}|^2\,d\sigma=\iint_S|\vec{r}(\varphi,z)|^2\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|d\varphi\,dz.$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=|(\cos\varphi,\sin\varphi,0)|=\sqrt{1}=1.$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+z^2\,d\varphi\,dz=\int_0^1\int_0^{2\pi}1+z^2\,d\varphi\,dz=2\pi\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_0^1=\frac{8\pi}{3}.$$

Medelvärden för massintegralen:

(a) Om f är kontinuerlig och begränsad på den styckvis reguljära kurvan Γ, så är $\int_\Gamma f(\vec{r})\,ds=f(\vec{r}_0)\int_\Gamma ds$ för någon punkt $\vec{r}_0\in\Gamma$.

(b) Om $\vec{f}(\vec{r})$ är kontinuerlig och begränsad på den styckvis reguljära ytan S, så är $\iint_S f(\vec{r})\,d\sigma=f(\vec{r}_0)\iint_S d\sigma$ för någon punkt $\vec{r}_0\in S$.

Slut // it.ws83.net