Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-10

Rättelse gällande förra föreläsningen: I satsen som angav ett tillräckligt villkor för inverterbarhet är det viktigt att parametriseringen är *kontinuerligt* inverterbar.

Sats:

Låt $\vec{F}$ vara ett fält med kontinuerliga derivator och låt K_n vara en följd av kroppar med strängt avtagande diameter, $d_n \to 0$, sådana att de alla innehåller punkten $\vec{r}_0$. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\oint\!\!\oint_{\partial K_n} \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma}{\iiint_{K_n} dx\,dy\,dz} = \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}_0)$$

Det ovanstående kan bevisas med Gauss' sats:

$$\oint\!\!\oint_{\partial K_n} \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma = \iiint_{K_n} \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\,dx\,dy\,dz$$

då $\vec{F}$ har kontinuerliga derivator är $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})$ en kontinuerlig funktion, så medelvärdessatsen ger för någon punkt $\vec{r}_n \in K_n$:

$$\iiint_{K_n} \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}_n)\iiint_{K_n} dx\,dy\,dz.$$

Eftersom $d_n \to 0$ måste vi ha att $\vec{r}_n \to \vec{r}_0$.

Exempel:

En elektrisk laddning ger upphov till ett fält $\vec{E} = Cq\dfrac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$. Bestäm flödet ut från sfären $x^2+y^2+z^2=1$.

Lösning:

Flödet ges av $\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma$.

Sfären parametriseras $r(\Theta,\varphi)=(\sin\Theta\cos\varphi, \sin\Theta\sin\varphi, \cos\Theta)$
$0\le\Theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

$$\text{Vi vill räkna } \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\Theta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)d\Theta\,d\varphi:$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}=(\cos\Theta\cos\varphi, \cos\Theta\sin\varphi, -\sin\Theta),$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=(-\sin\Theta\sin\varphi, \sin\Theta\cos\varphi, 0),$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=(\sin^2\Theta\cos\varphi, \sin^2\Theta\sin\varphi, \cos\Theta\sin\Theta).$$

Sätter vi dit ekvationen och enhetsvektorn $\hat{r}=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ får vi:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Cq\frac{\vec{r}(\Theta,\varphi)}{|\vec{r}(\Theta,\varphi)|^3}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\,d\Theta\,d\varphi=\ldots$$

(eftersom $\vec{r}$ ligger på enhetssfären är dess längd 1)

$$\ldots=Cq\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\vec{r}(\Theta,\varphi)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\,d\Theta\,d\varphi=$$

$$Cq\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin\Theta\cos\varphi, \sin\Theta\sin\varphi, \cos\Theta)\cdot$$

$$(\sin^2\Theta\cos\varphi, \sin^2\Theta\sin\varphi, \cos\Theta\sin\Theta)\,d\Theta\,d\varphi=$$

$$Cq\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\Theta\cos^2\varphi+\sin^3\Theta\sin^2\varphi+\cos^2\Theta\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi=$$

$$Cq\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\Theta+\cos^2\Theta\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi=Cq\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi=$$

$$2\pi Cq\left[-\cos\Theta\right]_0^{\pi}=4\pi Cq.$$

Exempel:

Beräkna $\operatorname{div}\vec{E}$.

Lösning:

$$\operatorname{div}\left(\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{|(x,y,z)|^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{|(x,y,z)|^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{|(x,y,z)|^3}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}=0.$$

Motsvarande för $\dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ ger att $\operatorname{div}\vec{E}=0+0+0=0$.

Konservativa fält i R3, definition: Fungerar på samma vis som i planet.

Som i planet sägs ett fält $\vec{F}=(P,Q,R)$ vara konservativt om och endast om linjeintegralen

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}=\int_\Gamma P dx+Q dy+R dz$$

bara beror på kurvans ändpunkter.

Exempel:

Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$ då $\vec{F}(x,y,z)=(x,z,y)$ och Γ parametriseras av $\vec{r}(t)=(\cos t, t^2, \sin t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Lösning:

$$\text{Vi vet att } \int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)dt.$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t))=(\cos t, \sin t, t^2),\ \vec{r}\,'(t)=(-\sin t, 2t, \cos t).$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)=-\cos t\sin t+2t\sin t+t^2\cos t.$$

$$\int_0^{2\pi}-\cos t\sin t+2t\sin t+t^2\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{d}{dt}(t^2\sin t)dt=$$

$$\left[\frac{\cos 2t}{4}+t^2\sin t\right]_0^{2\pi}=4\pi^2\sin 2\pi=0.$$

Sats:

Låt $\vec{F}(\vec{r})$ vara ett fält definierat i ett öppet sammanhängande område D i $\mathbb{R}^3$. Då är följande ekvivalent:

- (a) *Fältet är konservativt*
- (b) $\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}=0$ *för varje sluten kurva $\Gamma\subseteq D$.*
- (c) *Fältet har en potential U, dvs* $\operatorname{grad}U(\vec{r})=\vec{F}(\vec{r})$.

Exempel:

$\vec{F}(x,y,z)=(x,z,y)$ är konservativt, för det har en potential:

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+yz \Rightarrow \operatorname{grad}U=(x,z,y)=\vec{F}.$$

Definition:

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$.

Exempel:

$$\vec{F}(x,y,z)=(x,z,y)$$

$$\text{ger } \operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & z & y\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial y}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial z}, -\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)=(0,0,0).$$

Sats:

Om fältet $\vec{F}$ är konservativt i området D så är $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ i hela D.

Begreppsuppgift: Skriv om begreppet *tyngdpunkt.*

Slut // it.ws83.net