Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-05

Orienterbarhet, fortsättning (sats 11.1):

$$\textit{Ett regulärt ytstycke } \Sigma \textit{ har en parameterframställning } (u,v) \to \vec{r}(u,v)$$
$$\textit{där } (u,v) \in D, \textit{ där } D \textit{ är ett sammanhängande område } \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

$$\textit{Om } \begin{matrix} (u,v) \to \vec{r}(u,v) \\ (D \to \Sigma) \end{matrix} \textit{ är inverterbar, så är } \Sigma \textit{ orienterbar.}$$

Divergens:

$$\textit{Betrakta en kropp } K \textit{ med randyta } \partial K \textit{ som antas styckvis regulär (och orienterbar).}$$
$$\textit{Givet ett vektorfält } \vec{F} \textit{ så är flödet ut ur } K \textit{ (enl. tidigare):}$$
$$\oiint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma .$$

Om det inte finns några källor i K så blir flödet noll.
Vi använder divergensen för att avgöra om det finns några källor.

Vi specialiserar oss (enl. boken) till fallet då K är ett litet rätblock med måtten $2\Delta z, 2\Delta y, 2\Delta x$ och centrumpunkten $\vec{r}_0$.

$$\textit{Vidare antar vi att } \vec{F}(0,0,R) \textit{ och att } R(\vec{r}_0+\vec{r}) = R(\vec{r}_0) + A\vec{r}$$
$$\textit{dvs att } R(\vec{r}_0+\vec{r}) = R(\vec{r}_0) + \frac{\partial R}{\partial x}x + \frac{\partial R}{\partial y}y + \frac{\partial R}{\partial z}z$$
$$\textit{där derivatorna inte beror av } \{x, y, z\}.$$

$$\textit{Det ger att flödet blir: } \oiint_{\partial K} (0,0,R) \cdot \hat{n}\, d\sigma =$$
$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} R(x,y,z_0+\Delta z)\, dx\, dy - \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} R(x,y,z_0-\Delta z)\, dx\, dy =$$
$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} 2\frac{\partial R}{\partial z}\Delta z\, dx\, dy = 8\frac{\partial R}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z .$$

$$\textit{Medelkälldensiteten blir här } \quad \frac{8\frac{\partial R}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z}{8 \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Nu med ett mindre specialiserat fält:

$$\textit{Om } \vec{F}(P,Q,R) = (P,0,0) + (0,Q,0) + (0,0,R)$$
$$\textit{så blir flödet } \oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oiint_{\partial K} (P,Q,R) \cdot \hat{n}\, d\sigma =$$
$$\oiint_{\partial K} (P,0,0) \cdot \hat{n}\, d\sigma + \oiint_{\partial K} (0,Q,0) \cdot \hat{n}\, d\sigma + \oiint_{\partial K} (0,0,R) \cdot \hat{n}\, d\sigma = \ldots$$

Om nu K är ett litet rätblock och P, Q, R är av samma typ som R i exemplet ovan, dvs en funktion på formen konstant + linjär term så blir medelkälldensiteten för $\vec{F}$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

I allmänna fall använder vi oss av begreppet differentierbarhet:

$$\textit{Om } \vec{F} \textit{ är en differentierbar funktion så kan } \vec{F} \textit{ approximeras:}$$
$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \approx \vec{F}(\vec{r}_0) + J_{\vec{F}}(\vec{r}_0)\Delta\vec{r}.$$

Högerledet är av samma typ som vi redan betraktat.

Vi inför därför en definition:

$$\textit{Divergens: } \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$
$$\textit{Vi använder sedan tidigare } \nabla \text{ (nabla) } \textit{för att symbolisera gradient:}$$
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\textit{Så vi kan skriva att } \operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}. \quad (\textit{skalärprodukt})$$

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm } \operatorname{div}\vec{F} \textit{ då } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}.$$

Lösning:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = 1+1+1 = 3.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm } \operatorname{div}\vec{F} \textit{ då } \vec{F}(x,y,z) = (x^2,0,0).$$

Lösning:

$$\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (x^2,0,0) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = 2x + 0 + 0 = 2x.$$

Antag nu att vi har två rätblock som har en gemensam sida. Då har vi ett flöde "I" som går från det ena blocket till det andra och ett flöde "II" i motsatt riktining – men eftersom den gemensamma sidan är lika stor i bägge blocken tar flödena ut varandra. Alltså kan vi beräkna det sammansatta flödet genom att beräkna blocken var för sig och summera.

Alltså kan vi, givet en stor kropp, dela upp den i många små bitar och summera varje dels flöde för att få hela flödet, precis som vi brukar när vi har integraler.

$$\textit{Flödesintegralen: } \oiint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$
$$\textit{och då flödet hos varje litet rätblock är } \operatorname{div}\vec{F}\,\Delta v \textit{ borde vi}$$
$$\textit{ha att det totala flödet blir } \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz .$$
$$(\Delta v \textit{ är volymen hos det lilla rätblocket})$$

Gauss sats:

$$\textit{Låt } \vec{F} \textit{ vara ett fält med kontinuerliga derivator i } K \textit{ och antag}$$
$$\textit{att } \partial K \textit{ är styckvis regulär. Då är}$$
$$\oiint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$$
$$\textit{där } \hat{n} \textit{ är den utåtriktade normalen.}$$

Vi kan också skriva

$$\pm\oiint_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_K \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Låt } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \textit{ och beräkna } \oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$
$$\textit{då } \Sigma \textit{ är enhetssfären } x^2+y^2+z^2=1.$$

Lösning:

$$\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz = [\operatorname{div}\vec{F} \textit{ känd sedan tidigare}] = 3\iiint_K dx\, dy\, dz =$$
$$3 \cdot (\textit{volymen hos enhetsklotet}) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi .$$

Om vi inte hade känt till volymen av enhetsklotet kunde vi ha bestämt den genom att byta till sfäriska koordinater och lösa integralen.

Exempel/övning:

$$\textit{Låt } \vec{F}(x,y,z) = (x^2, yz, xy) \textit{ och beräkna } \oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$
$$\textit{då } \Sigma \textit{ är en cylinder med lock och botten och radie } 1, \textit{ höjd } 2.$$

Lösning:

$$\textit{Enl. Gauss sats skall vi beräkna: } \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz .$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial z} = 2x + z + 0$$
$$\iiint_K 2x + z\, dx\, dy\, dz = \left\{\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}\right\} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\varphi + z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$
$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^3\cos\varphi}{3} + \frac{zr^2}{2}\right]_0^1 d\varphi\, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\varphi}{3} + \frac{z}{2}\, d\varphi\, dz =$$
$$\int_0^2 \left[\frac{2\sin\varphi}{3} + \frac{z\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} dz = \int_0^2 \pi z\, dz = \left[\frac{\pi z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi .$$

Slut // it.ws83.net