Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-05-03

Detta moment skall vi fortsätta med linjeintegraler/vektorfält, men i rummet istf i planet (dvs i tre dimensioner).

Orienterbarhet: Om vi har någon yta, så har den ytan olika normalvektorer i olika punkter. Om nu ytan inte är helt plan, kommer vi att se att några av vektorerna pekar "utåt" och några pekar "inåt". Därmed kan vi bestämma vad som är ytans "utsida" respektive "insida".

Experiment: På en avlång pappersremsa ritar vi en rad av små cirklar på ena sidan, och på andra sidan kryss på motsvarande platser. Ändorna på pappret sammanförs, så att pappersremsan bildar en cylinder. Nu har vi på utsidan av cylindern enbart kryss, och på insidan enbart cirklar (eller tvärtom). Cylindern är alltså *orienterbar*. Vänder vi på den ena ändan i sammanfogningen kommer vi att få ett så kallat *Möbiusband*, där kryssen går över till cirklar (och tvärtom) i skarven. En sådan yta har bara en sida och är därmed inte orienterbar.

Exempel:

Vi har en yta Σ, och vill undersöka hur mycket av en gas, vars hastighet ges av hastighetsfältet $\vec{F}$, som strömmar genom Σ per tidsenhet.

Om vi tittar i någon punkt $\vec{r}\in\Sigma$, så har vi där normalvektorn $\hat{n}(\vec{r})$ och hastighetsvektorn $\vec{F}(\vec{r})$. Nu tar vi ett ytstycke med sidan $\Delta\sigma$. Vi vill veta volymen som spänns upp mellan ytstycket och $\vec{F}(\vec{r})$ i styckets hörn.

Idén är, som vanligt med integraler, att välja en så fin indelning som möjligt. Summerar vi i allt finare indelning, får vi ytintegralen:

$$\iint_\Sigma \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma$$

där $\hat{n}(\vec{r})$ är enhetsnormalen.

Om Σ är en parameteryta given av $\vec{r}(u,v)$, $\{u,v\}\in D$, så kan vi skriva om ytintegralen med hjälp av funktionen $\vec{r}(u,v)$:

$$\pm\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,du\,dv$$

där tecknet väljs så att $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ pekar i samma riktning som $\hat{n}(\vec{r}(u,v))$.

Vi vet sedan tidigare att normalen till en parameteryta ges just av $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

Enhetsnormalen ges av $\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|$ men vi har också sett att ytelementet $d\sigma$ ges av $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,du\,dv$.

Så $\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma=\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,du\,dv.$

Vi kan skriva

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

så om $\vec{F}=(P,Q,R)$ *blir*

$$\iint_\Sigma \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma=\pm\iint_D\left(P\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv=$$
$$\pm\iint_D P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy.$$

Ex/övning:

Beräkna $\iint_\Sigma (1,0,0)\cdot\hat{n}\,d\sigma$ *då Σ är enhetssfären:* $x^2+y^2+z^2=1$ *och $\hat{n}$ den utåtriktade enhetsnormalen.*

Lösning:

$$\vec{r}(\Theta,\varphi)=(\sin\Theta\cos\varphi,\sin\Theta\sin\varphi,\cos\Theta),\quad 0\le\Theta\le\pi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}=(\cos\Theta\cos\varphi,\cos\Theta\sin\varphi,-\sin\Theta)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=(-\sin\Theta\sin\varphi,\sin\Theta\cos\varphi,0)$$

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \cos\Theta\cos\varphi & \cos\Theta\sin\varphi & -\sin\Theta\\ -\sin\Theta\sin\varphi & \sin\Theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=(\sin^2\Theta\cos\varphi,-\sin^2\Theta\sin\varphi,\cos\Theta\sin\Theta)$$

$$\sqrt{(\sin^2\Theta\cos\varphi)^2+(-\sin^2\Theta\sin\varphi)^2+(\cos\Theta\sin\Theta)^2}=$$
$$\sqrt{\sin^4\Theta\cos^2\varphi+\sin^4\Theta\sin^2\varphi+\cos^2\Theta\sin^2\Theta}=\sqrt{\sin^4\Theta+\cos^2\Theta\sin^2\Theta}=\sin\Theta.$$

$$\iint_\Sigma(\sin^2\Theta\cos\varphi,-\sin^2\Theta\sin\varphi,\cos\Theta\sin\Theta)\cdot(1,0,0)\,d\varphi\,d\Theta=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\Theta\cos\varphi\,d\Theta\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sin^2\Theta\,d\Theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0.$$

Svaret förefaller naturligt när man tänker på att "flödet" genom en sfär alltid måste bli noll, eftersom lika mycket måste komma ut som kommer in.

Ex/övning:

Vad blir $\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma$ *då* $\vec{F}=(0,0,f(x,y))$, $\hat{n}=(0,0,1)$, *och Σ ges av* $\vec{r}(x,y)=(x,y,0)$, $\{x,y\}\in\Omega$.

Lösning:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=(1,0,0)\times(0,1,0)=(0,0,1)$$

$$\iint_\Omega(0,0,f(x,y))\cdot(0,0,1)\,dx\,dy=\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy.$$

Om funktionsgrafer:

Om vi har Σ given av en graf, $z=f(x,y)$ *parametriserad* $\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ *så blir* $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right).$

Vilket ger att ytintegralen

$$\iint_\Sigma\vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma=\pm\iint_D(P,Q,R)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dx\,dy=$$
$$\pm\iint_D -P\frac{\partial f}{\partial x}-Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\,dx\,dy.$$

Ex/övning:

Beräkna flödet för fältet $(0,0,1)$ genom halvsfären $x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\quad(z=\sqrt{1-x^2-y^2})$.

Lösning:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}dx\,dy=\pi.$$

Slut för idag // it.ws83.net