Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-04-28

Denna föreläsning endast räkneexempel inför KS, inget nytt.

Ex (9.7):

$$\text{Beräkna } \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy .$$

Lösning:

$$\textit{Problem: } e^{x^2} \textit{ har ingen elementär primitiv funktion!}$$
$$\textit{Genom att studera gränserna ser vi att området är en rätvinklig triangel med sidlängden } 1.$$

$$\textit{Vi kan skriva om integralen genom att byta plats på } x \textit{ och } y \textit{ (och räkna om gränserna):}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

Av detta lär vi oss att vi ibland kan få enklare integraler genom att byta plats på x- och y-integralerna. Viktigt är att man ändrar gränserna om gränserna är beroende av variablerna. Den yttersta integralen *måste* vara oberoende!

Exempel:

$$\text{Beräkna } \iint_\Omega x^2 - y^2\, dx\, dy \quad \text{där } \Omega : \{ |x| + |y| \le 1 \}.$$

Lösning:

$$\textit{Vi kan betrakta } |x| - |y| \le 1 \textit{ som fyra mindre områden: } \begin{Bmatrix} x+y \le 1 \\ x-y \le 1 \\ -(x+y) \le 1 \\ -(x-y) \le 1 \end{Bmatrix}.$$
$$\textit{Som synes är } (x+y) \textit{ och } (x-y) \textit{ de vesäntliga komponenterna.}$$

$$T^{-1}: \begin{Bmatrix} u = x+y \\ v = x-y \end{Bmatrix} \Rightarrow T: \begin{Bmatrix} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow J_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_T| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\iint_\Omega x^2 - y^2\, dx\, dy = \iint_\Omega (x+y)(x-y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 uv\, du \right) dv = \int_{-1}^1 \left[\frac{u^2 v}{4} \right]_{-1}^1 dv = 0.$$

Exempel:

$$\text{Beräkna } \iint_{2x^2+y^2 \le 1} xy\, dx\, dy. \quad \textit{Ledning: substituera } \begin{Bmatrix} \sqrt{2}\, x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{Bmatrix}.$$

Lösning:

$$T: \begin{Bmatrix} x = r\cos\varphi \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = r \sin\varphi \end{Bmatrix} \Rightarrow J_T = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} & -\dfrac{r}{\sqrt{2}} \sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_T = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\cos\varphi \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r \sin\varphi \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, dr \right) d\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{2} \int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{2} \cdot \frac{1}{4}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi}{16}\, d\varphi =$$
$$\left[-\frac{\cos 2\varphi}{32} \right]_0^{2\pi} = 0 .$$

Notervärt ovan:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$
$$\textit{är en ofta användbar omskrivning för att göra integraler lättare.}$$

Exempel:

$$\text{Beräkna } \iint_\Omega e^{y-x}\, dx\, dy \quad \text{då } y = \frac{x}{2}, \quad x \ge 2y \ge 0 .$$

Lösning:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^{x/2} e^{y-x}\, dy \right) dx = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x} \right) dx = \left[-2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} \right]_0^\infty = 2 - 1 = 1.$$

Alternativt kunde man ha bytt plats på *x* och *y*, vilket hade gett integralen $\int_0^\infty \left(\int_{2y}^\infty e^{y-x}\, dx \right) dy$.

Exempel:

$$\text{Beräkna } \iiint_K x\, dx\, dy\, dz \quad \text{då } K: \{ (x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}.$$

Lösning:

$$\textit{Sfäriska koordinater: } T: \{ x = r\cos\varphi \sin\theta,\ y = r \sin\varphi \sin\theta,\ z = r\cos\theta \}.$$
$$\textit{Vi vet redan att } \det J_T = r^2 \sin\theta .$$

$$\iiint_K x\, dx\, dy\, dz = \iiint_{K'} r^3 \cos\varphi \sin^2\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi \right) d\theta =$$
$$\int_0^\pi \sin^2\theta \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2\theta \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \right) d\theta = \frac{1}{4} \int 0 = 0.$$

Här får vi ett specialfall där vi snabbt kan ge resultatet 0, eftersom vi lätt kan se att

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = [-\sin\varphi]_0^{2\pi} = -\sin 2\pi + \sin 0 = 0.$$

Därmed blir hela integralen lika med noll.

Exempel:

$$\textit{Beräkna arean av } \vec{r}(u, v) = (u, v, 1), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1.$$

Lösning:

$$\iint_\Omega \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv = \iint_\Omega \left| \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| du\, dv = \iint_\Omega 1\ du\, dv = \int_0^1 \left(\int_0^1 du \right) dv = 1.$$

Lösningen var i det här fallet trivial (det är ganska uppenbart att en kvadrat med sidan 1 har arean 1) men formeln för att beräkna en parameterytas area är bra att komma ihåg.

Alternativt kan vi betrakta parameterytan som en funktion och använda en annan formel:

$$\iint_\Omega \sqrt{ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2 + 1 }\, du\, dv = \iint_\Omega \sqrt{0 + 0 + 1}\, du\, dv = \iint_\Omega 1\ du\, dv = 1.$$

Exempel:

$$\textit{Beräkna linjeintegralen } \oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} \quad \textit{då } \vec{F}(x, y) = (-y, x), \quad \Gamma \textit{ enhetscirkeln.}$$

Lösning:

$$\textit{Enh.cirkeln parametriseras } \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t).$$
$$\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi .$$

Alternativ lösning (Greens formel):

$$\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (-y, x)$$
$$\textit{Greens formel ger: } \oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy .$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \Rightarrow \iint_{x^2+y^2 \le 1} 1 - (-1)\, dx\, dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} dx\, dy = 2\pi .$$

Slut för idag // it.ws83.net