# Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-04-26

Sats (Greens formel):

$$\textit{Låt } \Gamma \textit{ vara en enkel, sluten kurva av ändlig längd som genomlöps}$$
$$\textit{i positiv led och som är randen till ett område } \Omega.$$
$$\textit{Antag att } P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \textit{ alla är kontinuerliga i } \Omega. \textit{ Då gäller:}$$
$$\oint_\Gamma P dx + Q dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

I enklare ordalag, har vi en kurva som begränsar ett område så kan vi räkna ut dennas linjeintegral genom att räkna en dubbelintegral på differensen av områdets partiella derivator.

Ex/övning:

$$\textit{Låt } \Gamma = \{(x, y);\ x^2+y^2=1\} \textit{ och beräkna } \oint_\Gamma -y dx + x dy.$$

Lösning:

$$P=-y, Q=x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=1, \frac{\partial P}{\partial y}=-1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-(-1)=2$$
$$\oint_\Gamma -y dx + x dy = 2 \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\, dy = 2\pi$$
$$(\textit{vi vet sedan tidigare att enhetscirkelns area är } \pi.)$$

Kor (följdsats):

$$\textit{Om } \Gamma \textit{ och } \Omega \textit{ är som i satsen blir } \oint_\Gamma -y dx + x dy = 2\cdot(\textit{arean av } \Omega).$$

För bevis av Greens formel, se Smartboardanteckningarna.

Ex/övning:

$$\textit{Beräkna } \oint_\Gamma x\, dx + xy\, dy$$
$$\textit{då } \Gamma \textit{ är randen till den halva av enhetscirkeln som är positiv på } x-\textit{axeln.}$$

Lösning:

$$P=x, Q=xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=y, \frac{\partial P}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y$$
$$\oint_\Gamma x\, dx + xy\, dy = \iint_\Omega y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1-x^2 dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = [\textit{räkna ut}] = \frac{2}{3}$$

*Obs: Ovanstående uträkning är inte kontrollräknad.*

Definition:

$$\textit{Låt } \vec{F} \textit{ vara av typ } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \textit{ dvs ett vektorfält, definierat i ett}$$
$$\textit{sammanhängande öppet område D. Om linjeintegralen}$$
$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad \textit{är oberoende av val av väg } \Gamma \subseteq D,$$
$$\textit{mellan givna start- och slutpunkter, kallas fältet konservativt.}$$

Sats:

$$\textit{Låt } F \textit{ vara ett vektorfält i ett öppet, sammanhängande område D.}$$
$$\textit{Då är följande ekvivalent:}$$

- $(i)$ $\vec{F}$ *är konservativt*
- $(ii)$ $\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$ *för varje sluten kurva i D.*
- $(iii)$ *Fältet har en potential, dvs en funktion* $U(\vec{r})$ *av typ* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sådan att* $\operatorname{grad} U(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$.

För bevis, se Smartboardanteckningarna.

---

Ex/övning:

$$\textit{Beräkna } \int_\Gamma y\, dx + x\, dy \quad \textit{då } \Gamma: x^2+y^2=2 \textit{ mellan } (1,-1) \textit{ och } (1,1).$$

Lösning:

$$\textit{Sök } U(x, y) \textit{ så att } \frac{\partial U}{\partial x}=y, \frac{\partial U}{\partial y}=x: \ U(x, y)=xy$$
$$\textit{Då kan vi skriva } \int_\Gamma y\, dx + x\, dy = U(1,1)-U(1,-1)=2$$
$$\textit{Enligt satsen ovan.}$$

Sats:

$$\textit{Om } \vec{F}=(P, Q) \textit{ är konservativt och } P, Q \textit{ har kontinuerliga partiella derivator}$$
$$\textit{så gäller } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

För bevis, se Smartboardanteckningarna.

Exempel:

$$\textit{Kan fältet } (-y, x) \textit{ vara konservativt? Nej, för } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2\neq 0.$$
$$\textit{Vidare: Om fältet } (-y, x) \textit{ hade en potential U skulle vi ha}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}=-y, \frac{\partial U}{\partial y}=x \Rightarrow U=xy+g(x) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}=y+g'(x)\neq -y.$$
$$\textit{Alltså finns ingen potential } U, \textit{ fältet kan således inte vara konservativt.}$$

Definition: Ett område är *enkelt sammanhängande* om man kan ta någon sammanhängande kurva i området och minska dennas längd tills den blir noll, utan att behöva gå utanför mängden.

En cirkelskiva är således sammanhängande, men en cirkelskiva med ett hål i är det inte, för vi kan lätt hitta en sammanhängande kurva inuti området som "fastnar" i hålet när vi försöker minska dess omfång.
Se Smartboardanteckningarna för illustration.

Sats:

$$\textit{Om villkoret } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad \textit{är uppfyllt i ett enkelt sammanhängande}$$
$$\textit{område } \Omega \textit{ så är fältet } (P, Q) \textit{ konservativt i } \Omega.$$

Beviset följer av Greens formel.

Ex/övning:

$$\textit{Visa att fältet } (y, x) \textit{ är konservativt i hela planet.}$$

Lösning:

$$\textit{Vi vet att } \text{hela planet} \textit{ är ett enkelt sammanhängande område.}$$
$$\textit{Alltså vet vi att fältet är konservativt. Dessutom har vi:}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-1=0 \Rightarrow \textit{Fältet är konservativt.}$$

Ex/övning:

$$\textit{Beräkna } \int_\Gamma y\, dx + x\, dy \quad \textit{där } \Gamma: x^2+y^2=2 \quad \textit{mellan } (1,-1) \textit{ och } (1,1)$$
$$\textit{genom att gå längs } \tilde{\Gamma} \textit{ (en rät linje mellan } (1,-1) \textit{ och } (1,1)).$$

Lösning:

$$\tilde{\Gamma} \textit{ parametriseras: } \tilde{\Gamma}=\{(1,t);\ -1\le t\le 1\}$$
$$\textit{Vi har att } \vec{F}(x, y)=(y, x), \ \vec{r}=(1,t).$$
$$\int_{-1}^{1}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt = \int_{-1}^{1}(t,1)\cdot(0,1)dt = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2.$$

Ex/övning:

$$\textit{Beräkna } \oint_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
$$\textit{då } \Gamma: x^2+y^2=1 \textit{ (enh.cirkeln) resp. } -1\le x\le 1, -1\le y\le 1 \textit{ (kvadrat).}$$

Lösning:

$$\textit{Cirkeln parametriseras } \vec{r}(t)=(\cos t, \sin t)$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$$\textit{Kvadraten: } 2\int_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2} + 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 4[\arctan x]_{-1}^{1} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Slut för idag // it.ws83.net