Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-31

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm volymen hos ellipsoiden} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1.$$

Lösning:

$$\textit{Substitution}: \ (u,v,w)=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=u^2+v^2+w^2\le 1$$

$$\iiint_K dx\,dy\,dz=\iiint_{K'}\left|\det J_T(u,v,w)\right|du\,dv\,dw$$

$$T^{-1}=\begin{cases} u=\dfrac{x}{a}\\ v=\dfrac{y}{b}\\ w=\dfrac{z}{c}\end{cases} \Rightarrow T=\begin{cases} x=au\\ y=bv\\ z=cw\end{cases} \Rightarrow J_T=\begin{pmatrix} a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\det J_T\right|=abc$$

$$\iiint_{K'}\left|\det J_T(u,v,w)\right|du\,dv\,dw=abc\iint_{K'}du\,dv\,dw=abc\frac{4\pi}{3}.$$

Areor för **parameterytor**, t ex $\vec r(u,v)$:

$$A=\iint_\Omega\left|\frac{\partial\vec r}{\partial u}\times\frac{\partial\vec r}{\partial v}\right|du\,dv$$

Speciellt om ytan är en graf $z=f(x,y)$: Grafen kan ses som en parameteryta genom att man skriver:

$$\vec r(x,y)=(x,y,f(x,y)) \Rightarrow \frac{\partial\vec r}{\partial x}=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial\vec r}{\partial y}=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\textit{så} \quad \frac{\partial\vec r}{\partial u}\times\frac{\partial\vec r}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec e_1&\vec e_2&\vec e_3\\1&0&\dfrac{\partial f}{\partial x}\\0&1&\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$$

$$\textit{vilket ger} \quad \left|\frac{\partial\vec r}{\partial x}\times\frac{\partial\vec r}{\partial y}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}$$

$$\textit{Så arean blir} \quad \iint_\Omega\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,dx\,dy.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna arean hos cylindern} \quad \vec r(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$$
$$\textit{då} \quad -1\le v\le 1,\quad 0\le u\le 2\pi.$$

Lösning:

$$\frac{\partial r}{\partial u}=(-\sin u,\cos u,0),\quad \frac{\partial r}{\partial v}=(0,0,1)$$

$$\begin{vmatrix}\vec e_1&\vec e_2&\vec e_3\\-\sin u&\cos u&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(\cos u,\sin u,0),\ \left|\cos u,\sin u,0\right|=\sqrt{\cos^2u+\sin^2u}=1$$

$$\iint_\Omega 1\ du\,dv=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{2\pi}du\right)dv=\int_{-1}^{1}2\pi\,dv=\left[2\pi v\right]_{-1}^{1}=4\pi$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna arean hos den del av grafen} \quad z=x^2+y^2 \quad \textit{som uppfyller} \quad z\le 1.$$

Lösning:

$$z=f(x,y)=x^2+y^2\le 1. \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y.$$

$$\iint_\Omega\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=[\textit{polära koordinater}]$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(1+4r)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{8}\right]_0^1 d\varphi=2\pi\left[\frac{2}{3}(1+4r)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{8}\right]_0^1=$$

$$2\pi\left(\frac{1}{12}5^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}\right)=\pi\frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{6}$$

Linjeintegraler beräknas mha ekvationen

$$\int_\Gamma\vec F(\vec r)\cdot d\vec r.$$

Tillämpningarna återfinns huvudsakligen inom fysiken, t ex för att beräkna arbete.

Om vi vi varje punkt har en vektor $\vec F=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$ blir $d\vec r=(dx,dy)$ och

$$\int_\Gamma\vec F(\vec r)\,d\vec r=\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Om *r(t)* är en paramatrisering av Γ och $a\le t\le b$ så får vi

$$\int_\Gamma\vec F(\vec r)\cdot d\vec r=\int_a^b\vec F(\vec r(t))\cdot\vec r\,'(t)\,dt=\int_a^b\left(P(x,y)\,x'(t)+Q(x,y)\,y'(t)\right).$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna} \quad \int_\Gamma\vec F(\vec r)\cdot d\vec r \quad \textit{då} \quad \vec F(x,y)=(x,y) \quad \textit{och} \quad \Gamma=(t,t),\quad 0\le t\le 2.$$

Lösning:

$$\int_\Gamma\vec F(\vec r)\cdot d\vec r=\int_a^b\vec F(\vec r(t))\cdot\vec r\,'(t)\,dt=\int_0^2(t,t)\cdot(1,1)=\int_0^2 t+t\,dt=2\left[\frac{t^2}{t}\right]_0^2=4.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna} \quad \int_\Gamma\vec F(\vec r)\,d\vec r \quad \textit{då} \quad \vec F=(x^2,xy) \quad \textit{och} \quad \Gamma \ \textit{är parabeln} \quad y=x^2,\quad 0\le x\le 1.$$

Lösning:

$$\Gamma \quad \textit{parametriseras av} \quad (t,t^2),\quad 0\le t\le 1 \quad \Rightarrow \vec F=(t^2,t^3).$$

$$\int_\Gamma\vec F(\vec r)\,d\vec r=\int_0^1(t^2,t^3)\cdot(1,2t)\,dt=\int_0^1 t^2+2t^4\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}.$$

Om kurvans ändar går ihop skriver man

$$\oint_\Gamma\vec F(\vec r)\cdot d\vec r.$$

Riktningen kan markeras med pil i integraltecknets cirkel. "Positiv led" åsyftar moturs riktning, dvs i positiv vinkel.

Sats (Greens formel):

$$\textit{Låt } \Gamma \textit{ vara en enkel, sluten kurva (sammanhängande, skär inte sig själv)}$$
$$\textit{av ändlig längd som genomlöps i positiv led och som är randen till ett område } \Omega.$$
$$\textit{Antag att } P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x} \textit{ är kontinuerliga i } \Omega. \textit{ Då gäller att}$$
$$\oint_\Omega P\,dx+Q\,dy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna} \quad \oint_\Omega -ydx+xdy \quad \textit{då } \Gamma \textit{ är enhetscirkeln},\quad x^2+y^2=1.$$

Lösning:

$$Q=x,\quad P=-y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-1.$$

$$\oint_\Gamma -ydx+xdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint_{x^2+y^2\le 1}dx\,dy=2\pi.$$

$$(\textit{Vi vet ju redan att enh.cirkeln har arean } \pi.)$$

Slut // it.ws83.net