Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-29

Sats:

$$\text{Om } f \text{ inte är större än eller lika med } 0 \text{ och } \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \text{ divergerar,}$$
$$\text{så kan det hända att enkelintegralerna existerar.}$$

Exempel (9.15):

$$\iint_\Omega x e^{-x^2}\,dx\,dy \quad \text{där } \Omega = \{y\,;\,y \geq 0\}:$$
$$\text{dubbelintegralen är divergent, ty:}$$
$$\iint_\Omega \left|x e^{-x^2}\right| dx\,dy = 2\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx\right) dy = 2\int_0^\infty \left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_0^\infty dy = \int_0^\infty dy = \infty$$
$$\text{men vi har:}$$
$$\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx\right) dy = \int_0^\infty \left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_{-\infty}^\infty dy = \int_0^\infty 0\,dy = 0$$

Exempel/övning:

$$\text{Beräkna } \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Lösning:

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\right) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$
$$[\text{polära koordinater}]:\ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty r\cdot e^{-r^2}\,dr\right) d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Trippelintegraler: Att integrera en funktion som är definierad i tre variabler (går inte att rita). Definieras som tidigare med Riemansummor.

$$S_i = \sum_{h,k,l} f(\xi_h, \eta_k, \zeta_l)\,\Delta x_h\,\Delta y_k\,\Delta z_l$$
$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim S_i$$

Där gränsvärdet tas i allt finare indelningar. Vi kan få volymen av en kropp K genom att trippelintegrera en etta, precis som vi kan få arean av ett område genom att dubbelintegrera.

$$V = \iiint_K dx\,dy\,dz.$$

Sats:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy.$$

Man kan också ta z-integralen ytterst:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz.$$

Exempel/övning:

$$\text{Beräkna volymen hos enhetsklotet } x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

Lösning:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right) d\varphi = 2\pi\int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\,r\,dr = 2\pi\left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Sfäriska resp. polära koordinater:

Sfäriska koordinater:	**Polära** koordinater:
$x = r\cos\varphi\sin\Theta$	$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi\sin\Theta$	$y = r\sin\varphi$
$z = r\cos\Theta$	

Som vi vet så får vi ett enkelt värde på $\left|\det J_T\right|$ när vi substituerar med polära koordinater.

$$\left|\det J_T(r,\varphi,\Theta)\right| = r^2\sin\Theta$$

Sats:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$\iiint_{K'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\det J_T(u,v,w)\right| du\,dv\,dw$$
$$\text{där } T \text{ tar } K' \text{ till } K.$$

Exempel/övning:

$$\text{Beräkna volymen hos enhetsklotet mha sfäriska koordinater.}$$

Lösning:

$$\iiint_{K'} \left|\det J_T(r,\varphi,\Theta)\right| dr\,d\varphi\,d\Theta = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\sin\Theta\,dr\right) d\varphi\right) d\Theta =$$
$$\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin\Theta\right]_0^1 d\varphi\right) d\Theta = \int_0^\pi 2\frac{\pi}{3}\sin\Theta\,d\Theta = \left[\frac{2\pi}{3}(-\cos\Theta)\right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Slut för idag // it.ws83.net