Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-24

$$\textit{Arean hos ett område } \Omega \textit{ ges av } \iint_\Omega dx\,dy.$$

För vissa områden vet vi redan hur area beräknas, t ex om vi har en sinuskurva:

$$y=\sin x, \quad 0\le x\le\pi \quad \textit{arean är: } \int_0^\pi \sin x\,dx$$

Dessa två definitioner måste överensstämma. Vi kontrollerar:

$$\iint_\Omega dx\,dy=\int_0^\pi\left(\int_0^{\sin x} dy\right)dx=\int_0^\pi \sin x\,dx$$

Och det visade sig ju stämma. Så långt, allt väl. Antag nu att vi har två kurvor *f(x)* och *g(x)*, och vill bestämma arean mellan dem i ett intervall *a-b*:

$$\iint_\Omega dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{f(x)} dy\right)dx=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$$

Också detta stämmer överens med vad vi väntade oss.

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna arean hos området } \Omega\textit{, som begränsas av linjerna}$$
$$x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=-1,\ x-y=-1.$$

Lösning:

$$\textit{Variabelbyte: } T^{-1}=\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases} \Rightarrow T=\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases},\quad J_T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\iint_\Omega dx\,dy=\iint_\Xi |\det J_T(u,v)|\,du\,dv \quad \textit{där} \quad T(u,v)=(x,y).$$

$$\textit{Så} \quad \det J_T=-\frac{1}{2} \Rightarrow |\det J_T|=\frac{1}{2}$$

$$\iint_\Omega dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_\Xi du\,dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 du\,dv=\frac{4}{2}=2\ .$$

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm arean hos en cirkelskiva med radie R.}$$

Lösning:

$$\textit{Cirkelskivan ges av} \quad x^2+y^2\le R.$$

$$\textit{Variabelbyte: } T=\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases},\quad J_T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix},\quad |\det J_T|=r$$

$$\iint_\Omega dx\,dy=\iint_\Xi |\det J_T(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi=\iint_\Xi r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\varphi=2\pi\frac{R^2}{2}=\pi R^2$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna} \iint_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2}dx\,dy \quad \textit{då} \ \Omega=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}.$$

Lösning:

$$T=\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases},\quad |\det J_T|=r \quad (\textit{känt sedan tidigare})$$

$$\iint_\Xi r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr\right)d\varphi=2\pi\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1=\pi\ln 2.$$

Generaliserade dubbelintegraler.

$$\Omega=\{(x,y);\ x\ge 0,\ y\ge 0\} \quad \textit{ett oändligt stort område}$$
$$\textit{Kan delas upp i mindre områden} \quad \Omega_1\le\Omega_2\le\Omega_3\le\ldots$$
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{i\to\infty}\iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$\textit{Om gränsvärdet existerar och är oberoende av val av uttömmande följd } \Omega_i.$$
$$\textit{Gränsvärdet existerar om} \quad f\ge 0, \quad \textit{men kan vara oändligt.}$$

Sats:

$$\textit{Om } (f\ge 0) \textit{ och någon av de upprepade enkelintegralerna}$$
$$\int_A\left(\int_{B_x} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \textit{och} \quad \int_B\left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx\right)dy,$$
$$\textit{där} \quad A=\{x;(x,y)\in\Omega \ \textit{ för något } y\},\quad B=\{y;(x,y)\in\Omega \ \textit{ för något } x\}$$
$$A_y=\{x;(x,y)\in\Omega \ \ y \textit{ fixt}\},\quad B_x=\{y;(x,y)\in\Omega \ \ x \textit{ fixt}\}$$
$$\textit{existerar, så är de lika med} \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Beräkna} \iint_\Omega e^{-x-y} \quad \textit{då } \Omega \textit{ är första kvadranten.}$$

Lösning:

$$\iint_\Omega e^{-x-y}dx\,dy=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x-y}dy\right)dx=\int_0^\infty\left[-e^{-x-y}\right]_0^\infty dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_\infty^0=e^0=1$$

Sats:

$$\iint_\Omega f\,dx\,dy \ \text{ konvergent } \Leftrightarrow \iint_\Omega |f|\,dx\,dy \ \text{ konvergent.}$$

Begreppsuppgift:

Förklara vad som menas med en samanhängande mängd och vad som skiljer de två sammanhängande mängderna nedan:

(en cirkel med ett hål i) *(en cirkel utan ett hål i)*

Slut för idag // it.ws83.net