Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-22

Något sämre resultat detta moment, många faller bort pga misslyckade eller obefintliga lösningar på grupparbeten. Borde inte behöva förekomma.

Dubbelintegraler: Vi tänker oss en (buktig) yta, som "svävar" över ett område (t ex xy-planet). Vi vill beräkna volymen under ytan. Antag nu att vi har någon punkt på planet, *(a,b)*. Motsvarande punkt på ytan (rakt ovanför) blir *f (a,b)*. Vi vill dela upp volymen i massor av rektanglar, så att det blir enkelt att beräkna volymen (motsvarande sätt som vi använder för att räkna vanliga integraler, men i tre dimensioner).

$$\text{En rektangel får volymen } f(a,b)\cdot\Delta x\Delta y$$
$$\text{Om vi har ett rutnät av } i\times j \text{ rektanglar blir den totala volymen}$$
$$S_k=\sum_{i,j} f(a_i,b_i)\Delta x_i\Delta y_i$$

Om ytan är kontinuerlig (tillräckligt "snäll") så kommer vi med allt tätare rutnät (högre *k*) så småningom komma nära integralens sanna värde. *k* är ett mått på indelningens grovlek, högre *k* innebär finare indelning.

Definition:

$$\text{En funktion sägs vara Riemannintegrabel om } \lim_{k\to\infty} S_k \text{ existerar}$$
$$\text{för varje indelning där diametern går mot noll.}$$

$$\text{Skrivsätt: } \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\text{här är } \Omega \text{ en rektangel, } \{(x,y);a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

Vi kan lika gärna ha en funktion som är definierad på något annat än en rektangel, t ex en cirkel. Vi hanterar detta genom att innesluta området i en större rektangel, och bestämma att funktionens värde är noll i det nya området.

$$\text{Om } f \text{ är definierad i ett område } \Omega \text{ som inte är en rektangel, så låter vi}$$
$$F(x,y)=\left\{\begin{matrix} f(x,y) & (x,y)\in\Omega \\ 0 & (x,y)\in\Sigma\setminus\Omega\end{matrix}\right\}$$
$$\text{och sätter } \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Sigma F(x,y)\,dx\,dy$$
$$\text{där } \Sigma \text{ är ett rektangulärt område som innesluter } \Omega.$$

En funktion är kontinuerlig nästan överallt om den är kontinuerlig utom på en mängd med "mått noll." Detta gäller för de flesta funktioner (i tillämpade sammanhang praktiskt taget alla).

Sats:

$$\text{Om } \Omega \text{ är begränsat och randen är en styckvis regulär kurva (har mått noll)}$$
$$\text{och } f \text{ är begränsad och kontinuerlig nästan överallt i } \Omega \text{ så existerar}$$
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy.$$

Denna sats säger vesäntligen att de flesta funktioner går att integrera. Vi kan också beräkna areor med dubbelintegral.

$$\text{Arean av ett område } \Omega \text{ ges av } \iint_\Omega dx\,dy.$$

Beräkning av dubbelintegraler:

$$\text{Vi har ett område } \Omega \text{ där hörnen har koordinaterna } (a,c),(b,c),(a,d),(b,d).$$
$$\text{Vi vill beräkna dubbelintegralen av funktionen } f(x,y) \text{ på detta område:}$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_d^c\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\text{Detta gäller under förutsättning att integralerna existerar.}$$

Exempel/övning:

$$\text{Beräkna } \iint_\Omega xy\,dx\,dy \text{ då } \Omega=\{(x,y);0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\}.$$

$$\iint_\Omega xy\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_{-1}^1 xy\,dy\right)dx=\int_0^2\left(\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{-1}^1\right)dx=\int_0^2 x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^2 0\,dx=0$$

$$\text{alt.: } \int_{-1}^1\left(\int_0^2 xy\,dx\right)dy=\int_{-1}^1\left(\left[\frac{yx^2}{2}\right]_0^2\right)dy=\int_{-1}^1 2y\,dy=0$$

Exempel/övning:

$$\text{Beräkna } \iint_\Omega x^2\,dx\,dy \text{ då } \Omega=\{(x,y);0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$$

$$\iint_\Omega x^2\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x^2\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\left[x^2y\right]_{x^2}^1\right)dx=\int_0^1 x^2-x^4\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

$$\text{alt.: } \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} x^2\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{y}}\right)dy=\int_0^1\frac{y^{3/2}}{3}dy=\left[\frac{2y^{5/2}}{5\cdot 3}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

Sats 9.5 i boken definierar diverse praktiska egenskaper hos dubbelintegraler. Vi kan t ex bryta ut konstanter, dela upp integraler av summor till summor av integraler, dela upp dubbelintegraler över stora områden i flera integraler över områdets delar (som summeras), osv. Läs i boken för mer info.

Variabelsubstitution i dubbelintegraler:

$$\text{en variabel: } \int_a^b f(x)\,dx=\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt$$
$$\text{två variabler: } \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Xi f(x(u,v),y(u,v))\cdot\left|\det J_T(u,v)\right|\,du\,dv$$
$$\text{där } T(u,v)=(x(u,v),y(u,v)) \text{ differentierbar och inverterbar funktion}$$
$$\text{som tar } \Xi\to\Omega \text{ sådan att } \det J_T\ne 0 \text{ nästan överallt i } \Xi.$$

Se Smartboardanteckningarna för beviset på det ovanstående.

Slut för idag // it.ws83.net