Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-16

Exempel/övning:

$$\textit{I vilka punkter antar funktionen } f(x,y)=e^{x^2+y^2} \textit{ sitt största resp minsta värde i området begränsat av linjerna } x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1.$$

Lösning:

$$\nabla f=(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}),\quad \nabla f=0 \quad \textit{då}\quad (x,y)=(0,0).$$
$$f(0,0)=e^0=1,\quad \textit{minpunkt ?}$$

$$\textit{Undersöker hörnen: } (x,y)=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$$
$$f(1,1)=f(1,-1)=f(-1,1)=f(-1,-1)=e^2\approx 7.4,\quad \textit{maxpunkter ?}$$

$$g_1(x,y)=x+1,\quad g_2(x,y)=x-1,\quad g_3(x,y)=y+1,\quad g_4(x,y)=y-1$$
$$\nabla g_1=\nabla g_2=(1,0)=\vec v,\quad \nabla g_3=\nabla g_4=(0,1)=\vec u$$
$$\textit{Obs: Linjerna ges då }\ g_n=0.$$

$$\textit{Fall I: Är } \nabla f \parallel \vec v?\quad (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})\parallel(1,0)\ \Rightarrow\ y=0.$$
$$y=0 \quad \textit{ger punkterna}\quad (1,0),(-1,0).$$

$$\textit{Fall II: Är } \nabla f \parallel \vec u?\quad (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})\parallel(0,1)\ \Rightarrow\ x=0.$$
$$x=0 \quad \textit{ger punkterna}\quad (0,1),(0,-1).$$

$$\textit{Undersöker fallen: }\ f(1,0)=f(-1,0)=f(0,1)=f(0,-1)=e^1=e.$$

$$\textit{Svar: Maxvärdet är }\ e^2\ \textit{ i punkterna }\ (\pm1,\pm1).$$
$$\textit{Minvärdet är }\ 1\ \textit{ i punkten }\ (0,0).$$

Minsta kvadrat-metoden har vi tidigare gjort mha summaräkning, nu skall vi göra den med matriser. Mkm är en väldigt viktig och fundamental metod, användbar särskilt vid feluppskattningar och liknande. Bra att lära sig, kommer inte på dagens KS, dock.

Exempel:

$$\textit{Bestäm den linje }\ y=k\cdot x+m\ \textit{ som bäst anpassar till punkterna } (0,0),(1,3) \textit{ och } (2,2).$$

Lösning:

$$\textit{I en perfekt värld skulle vi kunna skriva:}$$
$$\begin{matrix}0=k\cdot 0+m\\ 3=k\cdot 1+m\\ 2=k\cdot 2+m\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \left|\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}\right|^2=0$$
$$\textit{men eftersom världen inte alltid fungerar som vi vill, får vi istället försöka minimera uttrycket så att det kommer så nära } 0 \textit{ som möjligt.}$$

Sats:

$$\textit{Om }\ \vec x_0\ \textit{ är en minpunkt till }\ F(\vec x)=|A\vec x-\vec b|^2$$
$$\textit{så uppfyller } \vec x_0 \textit{ normalekvationen: }\quad A^TA\vec x_0-A^T\vec b=\vec 0$$

För bevis, se Smartboard-anteckningar.

Sats:

$$\textit{Normalekvationen har alltid minst en lösning.}$$

Sats:

$$\textit{Funktionen }\ F(\vec x)=|A\vec x-\vec b|^2\ \textit{ har en unik minpunkt om och endast om kolonnvektorerna i } A \textit{ är linjärt oberoende.}$$
$$\textit{Minpunkten är }\ \vec x_0=(A^TA)^{-1}\cdot A^T\vec b.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Minsta}-\textit{kvadrat anpassa punkterna }\ (0,0),(1,3)\ \textit{ och }\ (2,2) \textit{ till en linje, }\ y=k\cdot x+m.$$

Lösning:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix},\quad \vec b=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\quad \textit{beräkna }\ (A^TA)^{-1}A^T\vec b.$$

$$\left(\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=\left(1,\frac{2}{3}\right)=(k,m).$$

$$\textit{Svar: Linjen är }\ y=x+\frac{2}{3}.$$

För fullständiga uträkningar av matriserna ovan, se Smartboardanteckningarna.

Observera att följande omskrivning är möjlig om A och dess transponat är kvadratiska:

$$(A^TA)^{-1}A^T\vec b=A^{-1}A^{T^{-1}}A^T\vec b=A^{-1}\vec b\quad .$$

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm den parabel }\ y=ax^2+bx+c\ \textit{ som bäst anpassar till punkterna } (1,1),(2,3),(3,5) \textit{ och } (4,8).$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{pmatrix}\ \vec b=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix},\quad \textit{vi beräknar igen }\ (A^TA)^{-1}A^T\vec b.$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&4&9&16\\1&2&3&4\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&4&9&16\\1&2&3&4\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{4},\frac{21}{20},-\frac{1}{4}\right)=(a,b,c).$$
$$\textit{Obs: Inversen blir väldigt svår att räkna. Vi använde Matlab.}$$

$$\textit{Svar: }\ y=\frac{x^2}{4}+\frac{21}{20}x-\frac{1}{4}$$

Slut för idag // it.ws83.net