Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-15

Bivillkor i form av likheter: Enkelt i en variabel. Vi kan svara på en fråga som t ex “vilken av f(1) och f(-1) är störst?” enkelt, det är bara att sätta in punkten. I två variabler blir det något svårare.

Exempel:

$$\textit{Bestäm största och minsta värdet på funktionen } f(x,y)=x\cdot y \text{ antar på enhetscirkeln, } x^2+y^2=1.$$

Eftersom enhetscirkeln är kompakt så antar funktionen ett största och minsta värde. Så vi vet att det finns en lösning...

En metod för att lösa uppgiften är att parametrisera enhetscirkeln:

$$\textit{Enhetscirkeln kan ses som kurvan: } \vec{r}(t)=(x,y)=(\cos t,\sin t),\quad t\in[0,2\pi)$$
$$f(\vec{r}(t))=\cos t\cdot\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$$

Här har vi en funktion i en variabel, som vi kan undersöka på vanligt sätt.

$$\frac{d}{dt}f(\vec{r}(t))=0,\ \Rightarrow\ \cos 2t=0\ \Rightarrow\ 2t=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right\}\ \Rightarrow\ t=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$
$$f(\vec{r}(t))=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\},\quad \textit{Största värdet är } \frac{1}{2},\quad \textit{minsta värdet är } -\frac{1}{2}.$$
$$\textit{Vi måste också kontrollera ändpunkterna: } f(r(0))=f(r(2\pi))=0.$$

Denna metod har ett problem, vi vet inte alltid hur vi skall parametrisera en given kurva (enhetscirkeln är ju ett lyckligt undantag från detta). Därför har vi en annan metod, kallad *Lagranges multiplikatormetod.*

Låt $g(x,y)=x^2+y^2-1.$ *Nivåkurvan* $g(x,y)=0$ *är enhetscirkeln.*
Om $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$ *i alla punkter så definierar ekv* $g(x,y)=0$ *en regulär kurva i en omgivning av punkten* (x_0,y_0), *säg* $\vec{r}(t)$ *med* $\vec{r}(0)=(x_0,y_0)$ *och* $g(\vec{r}(t))=0.$
Om (x_0,y_0) *är en lokal extrempunkt för f med bivillkor* $g(x,y)=0$ *så är* $t=0$ *en lokal extrempunkt för* $h(t)=f(\vec{r}(t))$, *vilket ger* $h'(0)=0.$

Vad innebär det nu att derivatan av *h* i punkten noll är lika med noll? Vi använder derivatans kedjeregel:

$$0=h'(0)=\operatorname{grad} f(\vec{r}(0))\cdot\vec{r}\,'(0)$$

Så gradienten av *f* är vinkelrät mot tangentvektorn, dvs gradienten av *f* är normal till kurvan i punkten. Även gradienten av *g* är normal till kurvan i samma punkt. Alltså måste gradienterna av *f* respektive *g* vara parallella! Låt oss tillämpa detta på vårt exempel.

$$\nabla g=(2x,2y)\qquad \nabla f=(y,x)$$
Enligt vårt resonemang gäller antingen $\operatorname{grad} g(x_0,y_0)=(0,0)$
eller så är $\lambda\cdot\operatorname{grad} g(x_0,y_0)=\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ *om* (x_0,y_0) *är en extrempunkt med bivillkoret* $g(x,y)=0.$

Fall 1:

$$\nabla g(x,y)=(0,0)\ \textit{ ger }\ (x,y)=(0,0)\ \textit{ som inte uppfyller }\ g(x,y)=0.$$

Fall 2:

Gradienterna är parallella.

$$\begin{cases} y_0=\lambda 2x_0\\ x_0=\lambda 2y_0\\ x_0^2+y_0^2=1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ 0=\begin{vmatrix} y_0 & x_0\\ 2x_0 & 2y_0\end{vmatrix}=2y_0^2-2x_0^2$$
$$\textit{Så}\ \begin{cases} x_0^2=y_0^2\\ x_0^2+y_0^2=1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x_0^2=y_0^2\\ 2x_0^2=1\ \Rightarrow\ x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$
$$\textit{Detta ger en mängd tänkbara punkter, vi får}\quad max=\frac{1}{2},\quad min=-\frac{1}{2}.$$

Exempel/övning:

Antag att en aluminiumburk, där bottenplattan har radie r och höjden är h ska tillverkas. Vi vill att volymen skall bli så stor som möjligt då arean är A. Bestäm burkens proportioner då volymen är maximal.

Lösning:

$$A=2\pi rh+2\pi r^2=g(r,h),\quad V=\pi r^2h=f(r,h).$$
$$\nabla g(r,h)=(4\pi r+2\pi h,2\pi r)=(0,0)\ \textit{ bara om }\ (r,h)=(0,0).$$
$$\textit{Det stämmer dock inte med ekv: } 0\neq A=2\pi rh+2\pi r^2.$$

$$\textit{Vi undersöker sedan när } \nabla g\parallel\nabla f:$$
$$\nabla f(r,h)=(2\pi rh,\pi r^2)\ \textit{ och vi får ekvsystemet:}$$

$$\begin{cases} 4\pi r+2\pi h &=\lambda 2\pi rh\\ 2\pi r &=\lambda\pi r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2r+h &=\lambda rh\\ 2r &=\lambda r^2\ \Leftrightarrow\ 2=\lambda r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2r+h &=\lambda rh\\ r &=\frac{2}{\lambda}\end{cases}$$
$$\textit{Sätter vi ihop ekvationerna så får vi: } 4+\lambda h=2\lambda h\ \Leftrightarrow\ \lambda h=4\ \Rightarrow\ h=\frac{4}{\lambda}$$
$$\textit{Insatt i ekvationen för area ger detta: } A=2\pi\frac{2}{\lambda}\frac{4}{\lambda}+2\pi\frac{4}{\lambda^2}=\frac{24\pi}{\lambda^2}\ \Rightarrow\ \lambda=\sqrt{\frac{24\pi}{A}}.$$
$$\textit{Radien: } r=\frac{4\sqrt{6\pi}}{\sqrt{A}},\quad \textit{höjden } h=\frac{8\sqrt{6\pi}}{\sqrt{A}}=2r.$$

Exempel:

$$\textit{Finn det minsta värdet för } f(x,y)=y\ \textit{ då }\ y^3=x^3.$$

Lösning:

$$\nabla f(x,y)=(0,1),\quad g(x,y)=y^3-x^2\ \Rightarrow\ \nabla g(x,y)=(-2x,3y^2)$$
$$\textit{så}\quad \operatorname{grad} f(x,y)\parallel\operatorname{grad} g(x,y)\quad \textit{då } x=0,\ y\neq 0.$$
$$\textit{Men uppenbarligen når f sin minpunkt då } (x,y)=(0,0)\ \textit{ dvs då }\ \operatorname{grad} g(x,y)=(0,0).$$

Exempel/övning:

$$\textit{Finn största och minsta värdet som funktionen } f(x,y)=xe^{x+y} \textit{ antar i området } 3x^2+2xy+y^2\leq 2.$$

Lösning:

$$\textit{Vi börjar med att bestämma alla stationära punkter till f.}$$
$$\nabla f(x,y)=(e^{x+y}+xe^{x+y},xe^{x+y})\neq(0,0)\ \ (\textit{stationära punkter saknas!})$$

$$\textit{Vi jämför gradienterna:}$$
$$g(x,y)=3x^2+2xy+y^2-2\ \Rightarrow\ \nabla g(x,y)=(6x+2y,2x+2y)=(0,0)\ \textit{ då }\ (x,y)=(0,0).$$
$$\textit{Att}\ \nabla f\parallel\nabla g\ \textit{ ger }\ 0=\begin{vmatrix} 6x+2y & 2x+2y\\ (x+1)e^{x+y} & xe^{x+y}\end{vmatrix}=e^{x+y}\begin{vmatrix} 6x+2y & 2x+2y\\ x+1 & x\end{vmatrix}$$
$$\textit{Detta ger}\ 0=6x^2+2xy-2x^2-2x-2xy-2y\ \Leftrightarrow\ 2x^2=x+y\ \Rightarrow\ 4x^4=x^2+2xy+y^2$$
$$\textit{Ekv}\ g(x,y)=0\ \textit{ ger }\ 4x^4=x^2+2xy+y^2=2-2x^2\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{2},\mp\frac{3}{2}$$
$$\textit{Detta ger en rad intressanta punkter, räknar vi ut värdena i dessa kan vi bestämma att}$$
$$max=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}},\quad min=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}}$$

Slut för idag // it.ws83.net