# Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-10

Extremproblem i en variabel, exempel:

$$Låt \quad f(t)=\sin t \quad t\in(0,2\pi)$$

För att finna det största och minsta värdet, söker vi de punkter där derivatan är 0, dessa punkter kallas *stationära* eller *kritiska*.

$$0=f'(t)=\cos t \;\Rightarrow\; t=\frac{\pi}{2} \;eller\; \frac{3\pi}{2}.$$

Insattt i funktionen får vi:

$$f(\pi/2)=1, \quad f(-\pi/2)=-1$$
$$Vidare\ är \ \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 2\pi} f(t)=0.$$

Så vi har hittat våra extrempunkter. Anledningen till att vi undersöker gränsvärdena är för att det skulle kunna finnas punkter i funktionens start- eller slutpunkt som utgör max- eller minpunkter, men eftersom intervallet är öppet så måste vi undersöka gränsvärdena.

**Sats** (nödvändigt villkor för lokala extrempunkter):

$$Om \quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad definierad\ på\ en\ öppen\ mängd\ och \quad (x_0,y_0) \quad är\ en$$
$$lokal\ extrempunkt\ ,\ så\ är \quad \operatorname{grad} f(x_0,y_0)=(0,0)$$
$$eller\ så\ är \quad f \quad inte\ deriverbar\ i\ punkten.$$

Detta villkor säger att tangentplanet i punkten måste vara parallellt med *xy*-planet. Se Smartboard-anteckningar för bevis.

Exempel/övning:

$$Bestäm\ alla\ lokala\ extrempunkter\ till \quad x^2+y^2 \quad resp \quad \sqrt{x^2+y^2}.$$

Lösning:

$$Låt \quad f(x,y)=x^2+y^2, \quad \operatorname{grad} f=(2x,2y)$$
$$(2x,2y)=(0,0) \;\Rightarrow\; (x,y)=(0,0)$$
$$Så \quad (0,0) \quad är\ en\ stationär\ punkt.$$
$$Eftersom \quad f(0,0)=0 \ och \ f(x,y)>0 \ för\ alla\ andra \ x,y \ så\ är$$
$$punkten \ (0,0) \ en\ minpunkt\ och\ den\ enda\ extrempunkten.$$

$$Låt \quad g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad då\ är \quad \operatorname{grad} g=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
$$g(x,y)\neq(0,0) \quad för\ alla \quad (x,y)\neq(0,0), \quad men \quad \operatorname{grad} g \quad existerar\ inte\ i\ origo!$$
$$Således\ är \ (0,0) \ den\ enda\ möjliga\ lokala\ extrempunkten.$$
$$Eftersom \quad g(x,y)\geq 0 \quad och \quad g(0,0)=0 \quad är\ origo\ en\ lokal\ extrempunkt.$$

Exempel/övning:

$$Bestäm\ eventuella\ lokala\ extrempunkter\ till \quad f(x,y)=xy.$$

Lösning:

$$Stationära\ punkter: \quad \operatorname{grad} f(x,y)=(0,0) \quad ger \quad (y,x)=(0,0) \;\Rightarrow\; (x,y)=(0,0)$$
$$Men\ om \quad y=x \quad har\ vi \quad f(x,x)=x^2, \quad x=0 \quad lokalt\ min$$
$$Och\ om \quad y=-x \quad har\ vi \quad f(x,-x)=-x^2 \quad x=0 \quad lokalt\ max$$
$$Alltså\ saknas\ extrempunkter.$$

Vi kan undersöka om origo är en lokal extrempunkt genom att betrakta riktningsderivator:

$$f'_{\vec{n}}(x,y)=\operatorname{grad} f(x,y)\cdot\left(-\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\operatorname{grad} f(x,y)\cdot\vec{n}$$
$$För\ min\ ska \quad f'_{\vec{n}}\leq 0 \quad och\ för\ max\ ska \quad f'_{\vec{n}}\geq 0.$$

Exempel:

$$f(x,y)=xy \;\Rightarrow\; f'_{\vec{n}}(x,y)=-\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (olika\ tecken)$$

Taylorutveckling ger:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)+$$
$$\frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0) & \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}(x_0,y_0)\\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}(x_0,y_0) & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+O\left(\left|(x-x_0,y-y_0)^3\right|\right)$$

Exempel:

$$x_0=0,\; y_0=0,\; f(x,y)=xy:$$
$$f(x,y)=0+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\left(\left|(x,y)^3\right|\right)$$

Om nu punkten är en stationär punkt så vet vi direkt att gradienten är en nollvektor, så första termen försvinner.

Kvadratisk form: ett homogent polynom av grad 2.

$$p(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2=(x,y)\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$För\ en\ minpunkt\ gäller\ att \quad p(x,y)\geq 0 \quad och \quad p(x,y)=0 \quad bara\ för \quad (x,y)=(0,0).$$
$$För\ en\ maxpunkt\ gäller\ att \quad p(x,y)\leq 0 \quad och \quad p(x,y)=0 \quad bara\ för \quad (x,y)=(0,0).$$

$$M=\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}, \quad om \ \det M>0, \quad minpunkt\ om \quad A>0, \quad maxpunkt\ om \quad A<0.$$

Om $p(x,y)>0$ ibland och $p(x,y)<0$ ibland så kallas den *indefinit* och vi får en sadelpunkt. Detta svarar mot att determinanten av matrisen *M* är mindre än noll.

Om $p(x,y)\geq 0$ men lika med noll inte bara för origo, kallas den *positivt semidefinit*, respektive om $p(x,y)\leq 0$ men lika med noll inte bara för origo, kallas den *negativt semidefinit.*

Exempel:

$$f(x,y)=x^2+y^3 \quad \operatorname{grad} f=(2x,3y^2) \quad så\ origo\ är\ en\ stationär\ punkt,$$
$$men\ ingen\ extrempunkt\ som\ vi\ ser\ genom\ att\ ta \ x=0.$$

Exempel/övning:

$$Bestäm\ alla\ lokala\ extrempunkter\ till \quad f(x,y)=x^2+xy^2-y$$
$$och\ avgör\ deras\ karaktär.$$

Lösning:

$$Vi\ har \quad \operatorname{grad} f=(2x+y^2,\,2xy-1)$$
$$(2x+y^2,\,2xy-1)=(0,0) \;\Rightarrow\; (x,y)=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$
$$\begin{pmatrix}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(-\frac{1}{2},-1\right) & \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\left(-\frac{1}{2},-1\right)\\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\left(-\frac{1}{2},-1\right) & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(-\frac{1}{2},-1\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2y\\2y&2x\end{pmatrix}_{\left(-\frac{1}{2},-1\right)}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$$
$$Determinanten: \ -2-4=-6<0 \quad (sadelpunkt,\ ej\ extrempunkt)$$

Dagens resonemangsuppgift kommer att röra sats 8.6 ur boken.

Slut för idag // it.ws83.net