Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-08

Taylors formel i en variabel:

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(\tau)\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad \tau\in(a,t)$$

För funktioner $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, där f har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n+1$:

$$\textit{Sätt}\quad \varphi(t)=f(\vec{x}+t\vec{h}).$$
$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot t+\varphi''(0)\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+\varphi^{(n)}(0)\cdot\frac{t^n}{n!}+\varphi^{(n+1)}(\tau)\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)!},\quad \tau\in(0,t)$$

För att beräkna derivatan använder vi kedjeregeln:

$$\varphi(t)=f\circ g(t)\quad \textit{där}\quad g(t)=\vec{x}+t\vec{h}$$
$$\varphi'(t)=J_f(g(t))\cdot g'(t)=\text{grad}\, f(g(t))\cdot\vec{h}$$
$$\textit{så}\quad \varphi'(0)=\text{grad}\, f(\vec{x})\cdot\vec{h}=h_1\cdot\frac{\delta f}{\delta x_1}+\ldots+h_n\cdot\frac{\delta f}{\delta x_n}=\vec{h}\cdot\text{grad}\, f\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}=\vec{h}\cdot\text{grad}\, f$$
$$\textit{så}\quad \frac{d^n}{dt^n}=(\vec{h}\cdot\nabla f)^n$$

Sätter vi nu t=1 har vi:

$$f(\vec{x}+\vec{h})=f(\vec{x})+(\vec{h}\cdot\nabla)f(\vec{x})+\ldots+(\vec{h}\cdot\nabla)^n\frac{f(\vec{x})}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}(\vec{h}\cdot\nabla)^{n+1}f(\vec{x}+\tau\vec{h})$$

Speciellt när $n=2$:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\cdot\frac{\delta}{\delta x}+k\frac{\delta}{\delta y}\right)f(x,y)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\delta}{\delta x}+k\frac{\delta}{\delta y}\right)^n f(x,y)+$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\delta}{\delta x}+k\frac{\delta}{\delta y}\right)^{n+1}\cdot f(x+\tau h,y+\tau k)=$$
$$f(x,y)+h\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)+k\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)+\frac{h^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y)+hk\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}(x,y)+\frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)+\ldots+$$
$$\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i\cdot k^{n-i}\frac{d^n f}{\delta x^i\,\delta y^{n-1}}(x,y)+R_{n+1}(h,k)\quad\leftarrow(\textit{Lagranges restterm.})$$

Hela det sista uttrycket ovan är *Taylorpolynomet* $P_n(h,k)$.

Exempel/övning:

$$\textit{Bestäm McLaurinpolynomet av grad 2 till}\quad f(x,y)=e^{x+y}.$$

Lösning:

$$P_2(x,y)=1+x\frac{\delta f}{\delta x}(0{,}0)+y\frac{\delta f}{\delta y}(0{,}0)+\frac{x^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(0{,}0)+xy\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}+\frac{y^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(0{,}0)=$$
$$1+x+y+\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}+x+y+xy+1.$$

Exempel/övning:

$$\textit{Taylorutveckla}\quad e^{x+y}\quad \textit{kring punkten}\quad(1{,}0)\quad \textit{till andra ordningen.}$$

Lösning:

$$e^{x+y}=e+(x-1)\frac{\delta f}{\delta x}(1{,}0)+y\frac{\delta f}{\delta y}(1{,}0)+\frac{(x-1)^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(1{,}0)+$$
$$(x-1)y\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}(1{,}0)+\frac{y^2}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(1{,}0)+R_3(x-1,y)=$$
$$e+(x-1)e+y\cdot e+\frac{(x-1)^2}{2}e+(x-1)y\cdot e+\frac{y^2}{2}e+R_3(x-1,y)$$
$$\textit{där}\quad R_3(x-1,y)=\frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(x-1)^i\cdot y^{3-i}\cdot e^{\tau}$$

Vad är ett polynoms *grad* när polynomet har flera variabler?

$$x^5+4x^3y+6y^5x^2\quad \textit{har grad 7.}$$

Graden hos polynomet är högsta summan av x- och y-graden hos en term. Ett polynom där alla termer har samma grad kallas *homogent.*

Exempel:

$$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2\quad \textit{är homogent.}$$
$$x^5+4x^3y+6y^5x^2\quad \textit{är ej homogent.}$$

Sats:

$$\textit{Ett homogent polynom}\ \ p(\vec{x})\ \textit{av grad}\ \ n>-\infty\quad(\textit{dvs ej nollpolynomet})\ \textit{är av}\quad O(r^n),\quad r=|\vec{x}|.$$
$$\textit{inte lika med}\quad O(r^{\alpha})\quad \textit{om}\ \ \alpha>n.$$

Sats:

$$\textit{Om}\ \ f\ \ \textit{har kontinuerliga partiella derivator minst av ordning}\ \ n+1$$
$$\textit{i en omgivning av punkten}\ \ (x,y)\ \textit{och}\ \ f(\vec{x}+\vec{h})=P_n(\vec{x},\vec{h})+O(r^{n+1}),\quad r=|\vec{h}|$$
$$\textit{så är}\ \ P_n\ \ \textit{taylorpolynomet i}\ \vec{x}\ \textit{av grad n.}$$

Exempel/övning:

$$\textit{MacLaurinutveckla}\quad e^{x+y}\quad \textit{till ordning 2 med Ordorestterm.}$$
$$\textit{Taylorutveckla även}\quad e^{x+y}\quad \textit{kring}\ (1{,}0)\ \textit{till ordning 2 med ordorestterm.}$$

Lösning:

$$e^{x+y}=e^x\cdot e^y=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+O(r^3)\right)\cdot\left(1+y+\frac{y^2}{2}+O(r^3)\right)=1+x+y+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+xy+O(r^3).$$

Mer lösning:

$$e^{x+y}=e\cdot e^{(x-1)+y}=e\left(1+(x-1)+y+\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)y+\frac{y^2}{2}+O(r^3)\right)=$$
$$e+e(x-1)+ey+\frac{(x-1)^2}{2}e+(x-1)ye+\frac{y^2}{2}e+O(r^3).$$

Differentialer:

$$df(\vec{x},\vec{h})=(\vec{h}\cdot\nabla)f\quad \textit{eller}\quad df(\vec{x},d\vec{x})=(d\vec{x}\cdot\nabla)f$$
$$n=2:\quad df(x,y,dx,dy)=\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{\delta y}dy$$

Taylors formel med differentialer:

$$f(\vec{x}+\vec{h})=f(\vec{x})+df(\vec{x})+\frac{1}{2!}d^2f(\vec{x})+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(\vec{x})+O\left(|\vec{h}|^{n+1}\right)$$
$$\textit{där}\quad d^2f=(\vec{h}\cdot\nabla)^2f$$

Exempel:

$$\textit{Den inre energin}\ \ E\ \ \textit{hos en gas kan ses som en funktion av temperaturen}\ \ T\ \ \textit{och volymen}\ \ V.$$
$$\textit{Vi har att:}\quad T\cdot dS=dE+p\cdot dV.\quad \textit{Använd ideala gaslagen för att visa att}\ \ E\ \ \textit{bara}$$
$$\textit{beror av temperaturen, dvs}\quad \frac{\delta E}{\delta V}=0.$$

Lösning:

$$dE=\frac{\delta E}{\delta T}dT+\frac{\delta E}{\delta V}dV\qquad \textit{så}\quad T\cdot dS=\frac{\delta E}{\delta T}dT+\frac{\delta E}{\delta V}dV+p\cdot dV=\frac{\delta E}{\delta T}dT+\left(\frac{\delta E}{\delta V}+\frac{CT}{V}\right)dV$$
$$dS=\frac{1}{T}\frac{\delta E}{\delta T}dT+\left(\frac{1}{T}\frac{\delta E}{\delta V}+\frac{C}{V}\right)dV,\quad \textit{så}\quad \frac{\delta S}{\delta T}=\frac{1}{T}\frac{\delta E}{\delta T},\quad \frac{\delta S}{\delta V}=[\textit{parentesen}].$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta V\,\delta T}=\frac{1}{T}\frac{\delta^2 E}{\delta V\,\delta T},\quad \frac{\delta^2 S}{\delta T\,\delta V}=\frac{1}{T^2}\frac{\delta E}{\delta V}+\frac{1}{T}\frac{\delta^2 E}{\delta T\,\delta V},\qquad \textit{så}\quad \frac{\delta E}{\delta V}=0.$$

Slut för idag // it.ws83.net