Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-03

Moment 2 resultat hittills: 29 st godkända, 17 st behöver komplettera. 18 underkända hittills. Något sämre resultat än från moment 1... I dagens föreläsning kommer det att ingå en begreppsuppgift.

Implicita funktioner, exempel: $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln).

I denna funktion kan vi lösa ut y respektive x och får då två funktioner för varje:

$$y_1=\sqrt{1-x^2}\ (\text{övre halva}),\quad y_2=-\sqrt{1-x^2}\ (\text{undre halva})$$
$$x_1=\sqrt{1-y^2}\ (\text{höger halva}),\quad x_2=-\sqrt{1-y^2}\ (\text{vänster halva})$$

Nu kan vi försöka derivera de här funktionerna.

$$y_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad y_1 \text{ saknar derivata när } x=\pm 1\,.$$

Deriverar vi partiellt får vi samma resultat:

$$F(x,y)=x^2+y^2-1,\quad \frac{\delta F}{\delta y}=2y\neq 0\quad \text{då } x\neq\pm 1.$$

Ett annat exempel:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+2z=5\\ 5x-2y+3z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow[\text{lösa}]\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x=2-z\\ y=3-z\end{matrix}\right\}$$

Ett enklare exempel:

$$x+y+z=2\quad\Leftrightarrow\quad x=2-y-z\quad \text{Obs att koefficienten framför}\quad x=1\neq 0.$$

Sats:

Om $\vec F(\vec x,\vec y)$, *där* $\vec x$ *är de variabler som* $\vec y$ *blir funktion av, och* $\vec y$ *är de variabler som vi vill lösa ut, är en funktion av typ* $\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$ *med kontinuerliga partiella derivator och* $\vec F(\vec a,\vec b)=0$ *men* $\det\frac{\delta\vec F}{\delta\vec y}(\vec a,\vec b)\neq 0$ *så finns i en omgivning av* $\vec x=\vec a$ *precis en funktion* $\vec y=\vec f(\vec x)$ *med kont.part.derivator sådan att* $\vec F(\vec x,\vec f(\vec x))=\vec 0$ *och* $\vec f(\vec a)=\vec b$.

Obs: $\frac{\delta F}{\delta y}$ *är Jacobimatrisen med avseende på* $\vec y$*-variablerna.*

Åter till vårt exempel:

$$x^2+y^2=1,\quad\Rightarrow\quad F(x,y)=x^2+y^2-1\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta F}{\delta y}=2y$$

Satsen säger att så länge $y\neq 0$ *kan vi lösa ut y som funktion av x.*

Vi kan lika gärna byta plats på *x* och *y* och betrakta den partiella derivatan med avseende på *x*.

Det andra exemplet:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+2z=5\\ 5x-2y+3z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec F(z,x,y)=(x+y+2z,\,5x-2y+3z-4)$$

$$\text{Här är}\quad\vec x=z,\quad\vec y=x,y.$$

$$\frac{\delta\vec F}{\delta\vec y}=\begin{pmatrix}1&1\\5&-2\end{pmatrix},\quad\det\frac{\delta\vec F}{\delta\vec y}\neq 0,\quad\text{vilket visar att } x \text{ och } y \text{ kan lösas ut.}$$

Det tredje exemplet:

$$x+y+z=2\quad\Rightarrow\quad F(y,z,x)=x+y+z-2$$
$$\text{Här är}\quad\vec x=y,z,\quad\vec y=x.$$
$$\frac{\delta F}{\delta\vec y}=\frac{\delta F}{\delta x}=1\quad\text{så satsen säger att } x \text{ går att lösa ut.}$$

Exempel/övning:

Visa att vi kan lösa ut z *som funktion av* x *och* y *från ekvationen*
$z^2-x^2-y^2=1$ *nära punkten* $(0,0,1)$.

Lösning:

$$F(x,y,z)=z^2-x^2-y^2-1,\quad\vec x=x,y,\quad\vec y=z$$

$$\text{Ger:}\quad\det\frac{\delta F}{\delta\vec y}=\det\frac{\delta F}{\delta z}=2z,\quad\text{så:}\quad\det\frac{\delta F}{\delta z}(0,0,1)=2\neq 0\,.$$

Därmed går z *att lösa ut som en funktion av* x *och* y *i en omgivning kring* $(0,0,1)$.

$$\text{Men}\quad\frac{\delta F}{\delta\vec y}=\frac{\delta F}{\delta x}=2x\quad\text{som är noll i punkten.}$$

Exempel:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+2z=5\\ 5x-2y+3z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&5\\5&-2&3&4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&1&3\end{array}\right)$$

$$\text{sätt z till parameter } t:\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&t\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2-t\\0&1&0&3-t\\0&0&1&t\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\5&-2&3\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\5&-2\end{vmatrix}\neq 0\quad(\text{samma villkor som tidigare.})$$

Exempel:

$$T:\left\{\begin{matrix}u=x^2+y^2-1\\ v=x\end{matrix}\right\}\Rightarrow J_T=\begin{pmatrix}2x&2y\\1&0\end{pmatrix},\quad\det J_T=-2y$$

Exempel:

$$F(x,y)=x^2+y^2-1,\quad J_f(x)=f'(x)=-\left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^{-1}\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)=-(2y)^{-1}(2x)=-\frac{x}{y}$$

Krångligare exempel:

$$F(x,y,z)=z^2-x^2-y^2-1\quad(\vec x=x,y,\ \vec y=z)$$

$$\frac{\delta F}{\delta\vec x}=\left(\frac{\delta F}{\delta x},\frac{\delta F}{\delta y}\right)=(-2x,-2y),\quad\frac{\delta F}{\delta\vec y}=\frac{\delta F}{\delta z}=2z$$

$$\text{Så t ex}\quad\operatorname{grad}z(0,0)=-\left(\frac{\delta F}{\delta\vec y}\right)^{-1}\left(\frac{\delta F}{\delta\vec x}\right)=\frac{1}{2z}(-2x,-2y)=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=(0,0).$$

Vi kan också derivera funktionen direkt om vi håller i åtanke att *z* nu beror av *x* och *y*:

$$z^2-x^2-y^2-1=0$$

$$\frac{\delta}{\delta x}:\ 2z\cdot z'_x-2x=0\ \Leftrightarrow z'_x=\frac{x}{z},\quad\frac{\delta}{\delta y}:\ 2z\cdot z'_y-2y=0\ \Leftrightarrow\ z'_y=\frac{y}{z}$$

Exempel/övning:

Visa att det går att lösa ut x *som en funktion av* y *och* z *i en omgivning av punkten* $(\sqrt 2,0,1)$ *ur ekvationen* $x^2+y^2-z^2=1$. *Bestäm även de partiella derivatorna* $\frac{\delta x}{\delta y}(0,1)$ *och* $\frac{\delta x}{\delta z}(0,1)$.

Lösning:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1,\quad\frac{\delta F}{\delta x}(\sqrt 2,0,1)=2\sqrt 2\neq 0.$$

$$2x\cdot x'_y+2y=0,\quad 2x\cdot x'_z-2z=0\quad\Leftrightarrow\quad x'_y(0,1)=0,\quad x'_z(0,1)=\frac{1}{\sqrt 2}$$

Begreppsuppgift: Förklara minsta-kvadrat-metoden. Alternativ uppgift, sammanfatta den senaste veckan som du skulle för ett nära syskon eller familjemedlem.

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se