Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-03-01

Nya grupparbeten upplagda på kurshemsidan. Ve och fasa. Kontrollskrivningen gick lagom bra, genomsnittlig poäng 2,4 (gul lapp) respektive 2,2 (rosa lapp). De som fick 0 poäng har möjlighet att försöka igen i eftermiddag.

Inversa funktioner i en variabel (**sats**):

En deriverbar funktion av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad på ett intervall har en deriverbar invers, om och endast om $f'(x_0) \neq 0$ för alla x_0 i intervallet.

Detta kan vi bevisa mha derivatans kedjeregel (beviset återges inte här, se Smartboard-anteckningarna).

Sats:

En linjär avbildning $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$, där A är en konstant $n \times n$ −matris, av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, är inverterbar om och endast om matrisen A är inverterbar, dvs om $\det A \neq 0$.

Inversen blir $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$.

Som vi vet är en matris bara inverterbar om dess determinant inte är 0.

Sats:

Låt f vara en funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\vec{a}$. Då finns en differentierbar invers definierad i en omgivning av $\vec{f}(\vec{a})$ om och endast om $\det J_{\vec{f}}(\vec{a}) \neq 0$.

Inversens Jacobimatris ges av $J_{\vec{f}^{-1}}(\vec{y}) = \left(J_{\vec{f}}(\vec{x})\right)^{-1}$ där $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Se återigen Smartboard-anteckningarna för beviset.

Exempel:

Låt $f(x, y) = (e^x, e^{x+y})$. Punkten $f(0,0) = (1,1)$ och vi vill visa att det finns en invers definierad i en omgivning av $(1,1)$.

Lösning:

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \quad \det J_{\vec{f}}(0,0) = e^0 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0 = e^0 = 1 \neq 0$$

Svar: $\det J_{\vec{f}}(0,0) \neq 0$, *därför finns inversen.*

Ex/Övning:

Låt $f(x, y) = (x\cos y, x\sin y)$.
Avgör kring vilka punkter (x, y) funktionen har en differentierbar invers.

Lösning:

$$J_{\vec{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}, \quad \det J_f(x, y) = x$$

Så funktionen har differentierbar invers kring punkter där $x \neq 0$.

Ex/Övning:

$$\text{Låt } T = \begin{Bmatrix} u = x \\ v = y^2 \\ w = z^3 \end{Bmatrix}. \text{ Var är } T \text{ lokalt inverterbar?}$$

(Vi har alltså att $T(x, y, z) = (x, y^{2,} z^3)$.)

Lösning:

$$\det J_T(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{vmatrix} = 6yz^2$$

Så T är lokalt inverterbar då $y, z \neq 0$.

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se