Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-25

Exempel:

$$\textit{Låt}\quad T(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$$

$$\textit{Givet en funktion}\quad f\quad \textit{sätter vi}\quad \tilde{f}=(x(r,\varphi),\, y(r,\varphi))=f(r,\varphi).$$

$$\textit{Kedjeregeln säger:}\quad \operatorname{grad} f=J_f=J_{\tilde{f}\cdot T}=J_{\tilde{f}}\cdot J_T=\operatorname{grad}\tilde{f}\cdot J_T$$

$$\textit{Eftersom}\quad \operatorname{grad} f=\left(\frac{\delta f}{\delta r},\frac{\delta f}{\delta\varphi}\right)\textit{så}$$

$$\textit{får vi:}\quad \operatorname{grad}\tilde{f}\cdot J_T=\left(\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x},\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta\varphi}\\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta\varphi}\end{pmatrix}\quad \begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta r}&=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta r}+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta r}\\ \frac{\delta f}{\delta\varphi}&=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\varphi}+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta\varphi}\end{aligned}$$

$$\textit{Vi får så t ex:}\quad \frac{\delta f}{\delta\varphi}=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x}(-r\sin\varphi)+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}(r\cos\varphi)=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x}(-y)+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}x$$

$$\textit{Eller med differentialoperatorer:}\quad \frac{\delta}{\delta\varphi}=-y\frac{\delta}{\delta x}+x\frac{\delta}{\delta y}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}=\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)=\left(-y\frac{\delta}{\delta x}+x\frac{\delta}{\delta y}\right)\cdot\left(-y\frac{\delta}{\delta x}+x\frac{\delta}{\delta y}\right)=$$

$$y^2\frac{\delta^2}{\delta x^2}-y\frac{\delta}{\delta y}-xy\frac{\delta^2}{\delta x\,\delta y}-x\frac{\delta}{\delta x}-xy\frac{\delta^2}{\delta y\,\delta x}+x^2\frac{\delta^2}{\delta y^2}$$

Vi skriver alltså *x,y* som funktioner av *r* och φ, och transformerar enligt $f=\tilde{f}\circ T$.
Syftet är att transformera till något som är lättare att förstå.

Exempel:

$$\textit{Transformera}\quad \frac{\delta f}{\delta x}=0\quad \textit{med transformationen}\quad T(x,y)=(u(x,y),\, v(x,y))=(x+y,\, x-y)$$

$$\textit{Vi sätter}\quad \tilde{f}(u,v)=f(x,y)\quad \textit{så}\quad f=\tilde{f}\circ T,\quad \textit{vilket enligt kedjeregeln}$$

$$\textit{ger}\quad \operatorname{grad} f=\operatorname{grad}\tilde{f}\cdot J_T.$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}\quad \textit{eftersom}\quad \frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta x}=1.$$

$$\textit{Alltså:}\quad \frac{\delta f}{\delta x}=0\quad \textit{ger}\quad \frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}=0.$$

Nu när vi (inte) förstår någonting om transformerade differentialekvationer, går vi vidare med kurvor och ytor.

Vi påminner oss om **definitionen:**

$$\textit{Om}\quad \vec{r}\quad \textit{är en kontinuerlig funktion av typ}\quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\quad \textit{definierad på ett intervall}$$

$$\textit{sägs}\quad \vec{r}(t)\quad (\textit{eller}\ V_{\vec{r}})\quad \textit{vara en (parameter) kurva i}\quad \mathbb{R}^n.$$

Definition (regulär kurva):

$$\textit{En kurva}\quad \vec{r}(t)\quad \text{är regulär}\ \textit{om det i varje punkt}\quad \vec{r}(t)\quad \textit{gäller att}\quad \vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}.$$

$$\textit{Om detta gäller utom i ett ändligt antal punkter sägs kurvan vara}\ \text{styckvis regulär}.$$

$$\textit{De punkter där}\quad \vec{r}\,'(t)=\vec{0}\quad \textit{eller derivatan ej existerar kallas singulära punkter}.$$

Visa att enhetscirkeln är en regulär kurva.

Ex/Övning: $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t)\quad \vec{r}\,'(t)=(-\sin t,\cos t)\neq(0,0)$

Enhetscirkeln är regulär.

Definition:

$$\textit{Värdemängden till en kontinuerligt deriverbar funktion}\quad \vec{r}(t)\quad \textit{definierad på ett intervall}$$

$$\textit{och med högst ett ändligt antal nollpunkter för derivatan kallas}$$

$$\textit{regulär om gränsvärdet:}\quad \lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\quad \textit{existerar.}$$

$$\textit{En singularitet}\quad t_0\quad \textit{där gränsvärdet ovan existerar kallas}\ \text{falsk},\ \textit{annars är den}\ \text{äkta}.$$

Exempel:

$$\vec{r}(t)=(\cos(t^3),\sin(t^3))\quad \textit{ger}\quad \vec{r}\,'(t)=(-3t^2\sin(t^3),\, 3t^2\cos(t^3)),\quad \vec{r}\,'(0)=\vec{0}.$$

$$\textit{Men:}\quad \lim_{t\to 0}\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}=\lim_{t\to 0}(-\sin(t^3),\cos(t^3))=(0,1).$$

Så singulariteten är falsk.

Sats: *Grafen till en funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *är regulär om* f *har kontinuerlig derivata i alla punkter.*

Sats: *Om* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *har kontinuerliga partiella derivator och punkten* (a,b) *är sådan att*

$$F(a,b)=C\quad \textit{och}\quad \operatorname{grad} F(a,b)\neq\vec{0}$$

så utgör mängden $\{(x,y);\, F(x,y)=C\}$ *en regulär kurva lokalt kring* (a,b).

Exempel:

$$\textit{Enhetscirkeln;}\quad x^2+y^2=1\quad F(x,y)=1-x^2-y^2$$

$$\textit{Ger}\quad \operatorname{grad} F=(-2x,-2y)\neq 0\quad \textit{för}\quad (x,y)\quad \textit{sådana att}\quad F(x,y)=0.$$

Sats: *Om* $\operatorname{grad} F(a,b)\neq(0,0)$ *så är den normal till nivåkurvan* $F(x,y)=C$ *i punkten* (a,b), *om* $F(a,b)=C$.

Definition: *Värdemängden till en kontinuerlig funktion* $\vec{r}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ *definierad på en rektangel kallas en* parameteryta *eller ytstycke.*

Definition: *Ett regulärt ytstycke i* $\mathbb{R}^3$ *är värdemängden till en funktion* $\vec{r}$ *definierad i en öppen rektangel D, som har kontinuerliga partiella derivator*

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta u},\frac{\delta\vec{r}}{\delta v}\quad \textit{så att}\quad \vec{n}=\frac{\delta\vec{r}}{\delta u}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta v}\neq\vec{0}\quad \textit{för alla}\quad (u,v)\in D.$$

En delmängd i $\mathbb{R}^3$ *som i varje punkt har en omgivning där mängden sammanfaller med ett regulärt ytstycke kallas regulär.*

Exempel:

$$\textit{Enhetssfären;}\quad \vec{r}(u,v)=(\cos u\cos v,\, \cos u\sin v,\, \sin u)$$

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta u}=(-\sin u\cos v,\, -\sin u\sin v,\, \cos u),\quad \frac{\delta\vec{r}}{\delta v}=(-\sin v\cos u,\, \cos u\cos v,\, 0)$$

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta u}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & \cos u\\ -\sin v\cos u & \cos u\cos v & 0\end{vmatrix}=$$

$$(-\cos^2 u\cos v,\, -\cos^2 u\sin v,\, -\sin u\cos u)\neq\vec{0}\quad \textit{om}\quad \cos u\neq 0.$$

Övning: Visa att även dessa punkter är regulära.

Sats: *Grafen till en funktion* $z=f(x,y)$ *är regulär om* f *har kontinuerliga partiella derivator.*

Sats: *Om* F *har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten* (a,b,c) *och* $F(a,b,c)=C$, $\operatorname{grad} F(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *så är mängden* $\{(x,y,z);\, F(x,y,z)=C\}$ *regulär kring* (a,b,c).

Sats: *Om* $\operatorname{grad} F(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *och* $F(a,b,c)=C$ *så är* $\operatorname{grad} F(a,b,c)$ *normalvektor till nivåytan* $F(x,y,z)=C$ *i punkten* (a,b,c).

Exempel:

Givet $z=f(x,y)$ *har vi tre sätt att ta fram tangentplan.*

$$1:\quad z=f(a,b)+\operatorname{grad} f(a,b)\cdot(x-a,\, y-b)$$

$$2:\quad F(x,y,z)=z-f(x,y),\ F(x,y,z)=0,\quad \operatorname{grad} F(a,b,f(a,b))\cdot(x-a,\, y-b,\, z-f(a,b))=0.$$

$$3:\quad \vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),\ \frac{\delta\vec{r}}{\delta x}=\left(1,0,\frac{\delta f}{\delta x}\right),\ \frac{\delta\vec{r}}{\delta y}=\left(0,1,\frac{\delta f}{\delta y}\right),\ \frac{\delta\vec{r}}{\delta x}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta y}=\left(-\frac{\delta\vec{r}}{\delta x},-\frac{\delta\vec{r}}{\delta y},1\right)$$

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se