Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-23

Vi drar oss till minnes derivatans kedjeregel:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

där $f\circ g(x)=f(g(x))$, alltså sammansättningen av *f* och *g*.

Motsvarande regel gäller i flera variabler. **Sats:**

$$\textit{Låt}\quad \vec{g}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p\quad\textit{och}\quad \vec{f}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n\quad \textit{vara differentierbara funktioner.}$$
$$\textit{Då gäller:}\quad J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(\vec{x})=J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))\cdot J_{\vec{g}}(\vec{x})$$

Exempel:

$$\vec{g}(t)=(\cos t,\sin t),\quad f(x,y)=x^2+y^2$$
$$\textit{då är}\quad f\circ g(t)=1.\quad \textit{Så vi får:}\quad J_{f\circ\vec{g}}(t)=(f\circ\vec{g})'(t)=0\ .$$

$$\textit{Kedjeregeln ger:}\quad J_{f\cdot\vec{g}}(t)=J_f(\vec{g}(t))\cdot J_{\vec{g}}(t).$$
$$(f\circ g)'(t)=\operatorname{grad} f(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}'(t)$$

$$\textit{Vi får:}\quad \operatorname{grad} f(x,y)=(2x,2y),\quad \vec{g}'(t)=(-\sin t,\cos t)$$
$$\textit{Så}\quad \operatorname{grad} f(\vec{g}(t))=(2\cos t,2\sin t)\quad\textit{och}\quad \operatorname{grad} f(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}'(t)=$$
$$(2\cos t,2\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)=-2\cos t\sin t+2\sin t\cos t=0.$$

Från exemplet ovan ser vi att:

$$\textit{om}\quad \vec{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\quad\textit{och}\quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad\textit{så blir}\quad \frac{d}{dt}(f\circ\vec{g})(t)=\operatorname{grad} f(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}'(t).$$

Ex/övning: $\textit{Bestäm}\quad J_{\vec{g}\circ f}(x,y)\quad\textit{då}\quad \vec{g}\quad\textit{och}\quad f\quad\textit{är som i exemplet.}$

Lösning:

$$\vec{g}(t)=(\cos t,\sin t),\quad f(x,y)=x^2+y^2$$
$$J_{\vec{g}\circ f}=J_{\vec{g}}(f(x,y))\cdot J_f(x,y)$$
$$J_{\vec{g}}=(-\sin t,\cos t),\quad J_f=(2x,2y),\quad J_{\vec{g}}(f(x,y))=\left(-\sin(x^2+y^2),\cos(x^2+y^2)\right)$$
$$\begin{pmatrix}-\sin(x^2+y^2)\\ \cos(x^2+y^2)\end{pmatrix}\cdot(2x,2y)=\begin{pmatrix}-2x\sin(x^2+y^2) & -2y\sin(x^2+y^2)\\ 2x\cos(x^2+y^2) & 2y\cos(x^2+y^2)\end{pmatrix}.$$

Ex/övning: $\textit{Låt}\quad \vec{g}(t)=(t^2,1+t)\quad\textit{och}\quad f(x,y)=xy.\quad\textit{Bestäm}\quad J_{f\circ\vec{g}}(t)\quad\textit{och}\quad J_{\vec{g}\circ f}(x,y).$

$$\textit{Vi får att}\quad \operatorname{grad}\vec{g}(t)=(2t,1),\quad \operatorname{grad} f(x,y)=(y,x).$$

Lösning:

$$J_{f\circ\vec{g}}(t)=J_f(\vec{g}(t))\cdot J_g(t)=(1+t,t^2)\cdot(2t,1)=2t(1+t)+t^2=3t^2+2t$$
$$J_{\vec{g}\circ f}(x,y)=J_{\vec{g}}(f(x,y))\cdot J_f(x,y)=(2xy,1)\cdot(y,x)=\begin{pmatrix}2xy^2 & 2x^2y\\ y & x\end{pmatrix}.$$

Definition (riktningsderivata):

$$\textit{Låt}\quad f\quad\textit{vara en funktion av typ}\quad \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad\textit{och}\quad\vec{n}\quad\textit{enhetsvektor och bilda:}$$
$$f_{\vec{n}}'(\vec{x})=\lim_{t\to0}\frac{f(\vec{x}+t\vec{n})-f(\vec{x})}{t}=\frac{d}{dt}\left(f(\vec{x}+t\vec{n})\right)_{t=0}$$
$$\textit{Speciellt har vi att:}\quad f_{\vec{e}_1}'(\vec{x})=\frac{\delta f}{\delta x}(\vec{x}),\quad f_{\vec{e}_2}'(\vec{x})=\frac{\delta f}{\delta y}(\vec{x})$$

Sats:

$$\textit{Om}\quad f\quad\textit{är differentierbar i}\quad\vec{x}\quad\textit{så är}\quad f_{\vec{n}}'(\vec{x})=\operatorname{grad} f(\vec{x})\cdot\vec{n}.$$

Vi ser att riktningsderivatan är störst om *n* har samma riktning som grad *f*.

Ex/övning: $\textit{Beräkna riktningsderivatan för funktionen}\quad x^2-y^2=1\quad\textit{i punkten}\ (\sqrt{2},1)\ \textit{med riktning}\ (1,1).\ \textit{I vilken riktning växer funktionen snabbast?}$

Lösning:

$$\textit{Först ska vi normera riktningsvektorn:}\quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(1,1)}{|(1,1)|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
$$f_{\vec{n}}'(\sqrt{2},1)=\operatorname{grad} f(\sqrt{2},1)\cdot\vec{n}\quad\textit{som vi skrev ovan.}$$
$$\textit{Vi har}\quad \operatorname{grad} f(x,y)=(2x,-2y),\quad \operatorname{grad} f(\sqrt{2},1)=(2\sqrt{2},-2)$$
$$\textit{Så}\quad f_{\vec{n}}'(\sqrt{2},1)=(2\sqrt{2},-1)\cdot(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=2-\sqrt{2}.$$
$$\textit{Funktionen växer snabbast i gradientens riktning, dvs i}\quad(2\sqrt{2},-2).$$

En annan tillämpning är transformation av differentialekvationer.

$$\textit{Betrakta}\quad \frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}=0\ .\ \textit{Hur ser lösningarna ut?}$$
$$f(x,y)=g(x-y)\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}=g'-g'=0$$

$$\textit{Låt}\quad T(x,y)=(x-y,y)=(u,v).$$
$$\textit{Då ger kedjeregeln att om}\quad \tilde{f}(u,v)=f(x,y)\quad\textit{så är}\quad \operatorname{grad} f=\operatorname{grad}\tilde{f}\cdot J_T\ .$$
$$\left(\frac{\delta f}{\delta x},\frac{\delta f}{\delta y}\right)=\left(\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x},\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y}\\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y}\end{pmatrix}=\left(\frac{\delta\tilde{f}}{\delta x},\frac{\delta\tilde{f}}{\delta y}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u},\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}-\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}\right)$$
$$\textit{Så}\quad\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}=0\quad\textit{transformeras till}\quad\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}+\left(\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}-\frac{\delta\tilde{f}}{\delta u}\right)=\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}=0.$$
$$\textit{Vi får att}\quad\tilde{f}(u,v)=\tilde{g}(u)\quad\textit{så}\quad f(x,y)=g(x-y)\quad\textit{för någon derivarbar funktion}\ g.$$

För att hitta en bra transformation, observerar vi att

$$\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}=\operatorname{grad} f\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\operatorname{grad}\tilde{f}\cdot J_T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
$$\textit{Vi vill alltså att}\quad J_T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\textit{ska ha en enkel form, t ex}\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
$$\textit{Vi vill ha}\quad J_T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad J_T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
$$\textit{Vi väljer alltså}\quad J_T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad\textit{vilket ger}\quad J_T=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ex/övning:

$$\textit{Finn allmänna lösningen till}\quad\frac{\delta f}{\delta x}-\frac{\delta f}{\delta y}=0\ .$$
$$\textit{Vi ser att om}\quad f(x,y)=g(x+y)\quad\textit{så uppfylls villkoret.}$$
$$\textit{Vilken matris}\quad J_T\quad\textit{ger}\quad J_T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}?$$

Lösning:

$$\textit{Vi kan gissa en lösning,}\quad J_T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad\textit{ex.vis.}$$
$$J_T=\begin{pmatrix}\frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y}\\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad\textit{så vi tar}\quad T(x,y)=(x+y,-y)=(u,v).$$
$$\textit{Ekv}\quad\frac{\delta f}{\delta x}-\frac{\delta f}{\delta y}=0\quad\textit{transformeras till}\quad\frac{\delta\tilde{f}}{\delta v}=0\ .$$
$$\textit{så}\quad\tilde{f}(u,v)=\tilde{g}(u)\quad\textit{dvs}\quad f(x,y)=g(x+y).$$

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se