Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-18

Differentierbarhet, fortsättning: En funktion i flera variabler sägs vara differentierbar i en punkt om:

$$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})=\vec{f}(\vec{x})+A\cdot\vec{h}+\vec{R}(\vec{x},\vec{h})\cdot|\vec{h}| \quad \text{där} \quad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{R}(\vec{x},\vec{h})=\vec{0}\ .$$

$$\text{Där } \vec{f} \text{ är en funktion } \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \text{ och } \vec{x} \text{ är en punkt.}$$

Vi kan bestämma A som tidigare och får att:

$$\text{om} \quad \vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{så är} \quad A=J_{\vec{f}}=\begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix}.$$

Matrisen A får alltså dimensionerna $m\times n$ och kallas *Jacobimatrisen*. "grad" betecknar *gradienten*, som alltså är:

$$\text{grad } \vec{f}(\vec{x})=\left(\frac{\delta f}{\delta x_1},\frac{\delta f}{\delta x_2},\ldots,\frac{\delta f}{\delta x_n}\right)\ .$$

Nu till några räkneexempel.

Ex/Övning:

$$\text{Bestäm } J_{\vec{f}} \text{ då } \vec{f}(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u).$$

Lösning:

$$J_{\vec{f}}=\begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \text{grad } f_2 \\ \text{grad } f_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin u\cos v & -\sin v\cos u \\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ex/Övning:

$$\text{Bestäm } J_{\vec{f}} \text{ då } \vec{f}(t,u,v)=\left(t^2-uv,tuv,\frac{uv}{t}\right).$$

Lösning:

$$J_{\vec{f}}=\begin{pmatrix} 2t & -v & -u \\ uv & tv & ut \\ -\frac{uv}{t^2} & \frac{v}{t} & \frac{u}{t} \end{pmatrix}\ .$$

Specialfall när vi har $n=2,\ m=1$:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\text{grad } f(x,y)\cdot(h,k)+R(x,y,h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}$$
$$\text{Planet} \quad z=f(a,b)+\text{grad } f(a,b)\cdot(x-a,y-b)$$
$$\text{kallas för tangentplanet till grafen} \quad z=f(x,y) \quad \text{i punkten} \quad (a,b).$$

Nu ska vi bestämma ett tangentplan:

Ex/Övning:

$$\text{Bestäm tangentplanet till ytan} \quad z=x^2y \quad \text{i punkten} \quad (x,y)=(2,3).$$

Lösning:

$$z=f(2,3)+\text{grad } f(2,3)\cdot(x-2,y-3),\quad \text{grad}(x^2y)=\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$
$$z=12+(12,4)\cdot(x-2,\ y-3)=12+12x-24+4y-12=12x+4y-24$$

$$\text{Svar:} \quad z=12x+4y-24$$

Ex/Övning:

$$\text{Bestäm gradienten till} \quad F(x,y,z)=z-x^2y.$$

Lösning:

$$\text{grad } F=\left(\frac{\delta F}{\delta x},\frac{\delta F}{\delta y},\frac{\delta F}{\delta z}\right)=\left(-2xy,-x^2,1\right).$$

Mer:

$$\text{grad } F(2,3,12)=(-2\cdot2\cdot3,\ -(2^2),\ 1)=(-12,\ -4,\ 1)$$
$$\text{grad } F(2,3,12)\cdot(x-2,y-3,z-12)=-12(x-2)-4(y-3)+1(z-12)$$
$$\Rightarrow\ z=12(x-2)+4(y-3)+12=\text{grad } f(2,3)\cdot(x-2,y-3)+12$$

Vi ser att resultatet blev precis tangentplanet till $z=f(x,y)$. Vi valde $z=12$ för att få $F(x,y,z)=0$.

Ex/Övning:

$$\text{Bestäm tangentplanet till} \quad z=x^2+y^2 \quad \text{i punkten} \quad (x,y)=(1,1).$$

Lösning:

$$F(x,y,z)=z-x^2-y^2,\quad \text{grad } F=(-2x,-2y,1)$$
$$\text{i punkten} \quad (1,1) \quad \text{får vi } z=2 \quad \text{eftersom} \quad F(1,1,2)=0.$$
$$\text{då är} \quad \text{grad } F(1,1,2)=(-2,-2,1) \quad \text{och vi får ekvationen:}$$
$$(-2,-2,1)\cdot(x-1,y-1,z-2)=-2(x-1)+-2(y-1)+z-2\ .$$
$$\text{Löser vi ut } z\text{, får vi:} \quad z=2x+2y-2\ .$$

$$\text{Svar:} \quad \text{Tangentplanet är} \quad z=2x+2y-2\ .$$

Alt. Lösning:

$$z=f(1,1)+\text{grad } f(1,1)\cdot(x-1,\ y-1)=2+(2,2)\cdot(x-1,y-1)=$$
$$2+2(x-1)+2(y-1)=2x+2y-2$$

$$\text{Svar:} \quad \text{Tangentplanet är} \quad z=2x+2y-2\ .$$

Högre derivator i flera variabler:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2},\quad \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right),\quad \frac{\delta^2 f}{\delta y\,\delta x}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$$

I de flesta vanliga fall blir derivatorna samma oavsett i vilken ordning man tar dem. Det är dock inte sant i det allmänna fallet.

Ex/Övning:

$$f(x,y)=x^2y,\quad \text{bestäm} \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y},\quad \frac{\delta^2 f}{\delta y\,\delta x}.$$

Lösning:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}=\frac{\delta}{\delta x}(x^2)=2x,\quad \frac{\delta^2 f}{\delta y\,\delta x}=\frac{\delta}{\delta y}(2xy)=2x$$

Sats: *Om de blandade derivatorna* $\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}$ *och* $\frac{\delta^2 f}{\delta y\,\delta x}$ *är kontinuerliga i en omgivning av en punkt så är de lika i omgivningen.*

Exempel:

$$\text{Låt} \quad f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{om } x=0 \text{ eller } y=0 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}.$$
$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$
$$\text{på samma sätt:} \quad \frac{\delta f}{\delta y}(0,0)=0,\quad \text{men } f \text{ är ej differentierbar eller kontinuerlig.}$$

Sats: *Om f är differentierbar så är den kontinuerlig.*

Sats: *Om alla partiella derivator till en funktion $\vec{f}$ är kontinuerliga i en omgivning av en punkt så är $\vec{f}$ differentierbar i omgivningen.*

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se