Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-01-28

Datorprogrammet som vi ska använda kommer småningom delas ut med en licens per två man, förhoppningsvis kommer vi någon gång ha licenser nog så att alla kan få det.

Resonemangsuppgift på lektionen i eftermiddag: Förra gången så vi att en bas i $\mathbb{R}^n$ har högst n stycken vektorer, och standardbasen har precis n vektorer. Vi kan visa att *alla* baser i $\mathbb{R}^n$ faktiskt har n vektorer så länge vi har ett ändligt antal dimensioner.

Sats: *Alla baser i* $\mathbb{R}^n$ *består av* n *stycken basvektorer.*

Exempel:

$$\text{Låt } \vec{f}_1=(1,2),\ \vec{f}_2=(1,1).\ \text{Vi betraktar vektorn } (5,2).$$
$$\text{Vilka är dess koordinater i basen } \boldsymbol{f}\text{ ?}$$

$$\text{Alltså: Hur kan vi skriva } (5,2) \text{ som en linjärkombination av } \vec{f}_1 \text{ och } \vec{f}_2\text{ ?}$$
$$(5,2)=c_1\vec{f}_1+c_2\vec{f}_2 \quad c_1,c_2=?$$

$$\text{Matrisform: } \left(\begin{array}{cc|c}1&1&5\\2&1&2\end{array}\right) \text{ löser vi och får } \begin{Bmatrix}c_1=-3\\c_2=8\end{Bmatrix}.$$

$$\text{Svar: } (5,2)=(-3,8)_{\boldsymbol{f}}$$

Låt oss nu försöka hitta ett samband mellan koordinatframställningarna.

$$\begin{Bmatrix}\vec{f}_1=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2\\ \vec{f}_2=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2\end{Bmatrix} \text{ kan skrivas: } \left(\vec{f}_1,\vec{f}_2\right)=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$$

$$\text{Då kan vi skriva: } \vec{v}=(-3,8)_{\boldsymbol{f}}=-3\vec{f}_1+8\vec{f}_2=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2\right)\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$$

$$\text{eller: } \vec{v}=(5,2)=5\vec{e}_1+2\vec{e}_2=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{Sambandet ovan ger: } \vec{v}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$$
$$\text{och: } \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$$

2x2-matrisen med x och y som vi fick på slutet kallas för *transformationsmatris* eftersom den transformerar från ett koordinatsystem till ett annat.

"Koordinaterna i **e**-systemet = basvektorerna uttryckta i **e**-systemet x koordinaterna i **f**-systemet."

Övning:

$$\text{Låt } \boldsymbol{g} \text{ vara basen } \vec{g}_1=(3,-1),\ \vec{g}_2=(0,1).$$
$$\text{Finn vektorn } (5,2)\text{:s koordinater i } \boldsymbol{g}-\text{systemet genom att transformera.}$$

$$\text{Vi räknar: } \begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\11/3\end{pmatrix}$$

$$\text{Svar: } (5,2)=\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)_{\boldsymbol{g}}$$

Att komma ihåg: Inversen till en matris kan fås genom att lösa $\left(\begin{array}{ccc|ccc}a&b&\cdots&1&0&\cdots\\c&d&\cdots&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots\end{array}\right)$,

men för 2x2-matriser kan det göras ännu enklare: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

Övning:

$$\text{Finn transformationsmatrisen som går mellan } \boldsymbol{f} \text{ och } \boldsymbol{g}-\text{systemen.}$$
$$\text{Uträkning: } \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}5/3\\11/3\end{pmatrix} \text{ där kolonnvekt. i } \boldsymbol{C} \text{ är } \boldsymbol{g}-\text{basen uttryckt i } \boldsymbol{f}-\text{basen.}$$

$$\vec{g}_1=(3,-1),\ \vec{g}_2=(0,1) \quad \text{och} \quad \vec{f}_1=(1,2),\ \vec{f}_2=(1,1).$$
$$g_{1f}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix},\quad g_{2f}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{Vilket ger oss: } \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&1\\7&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5/3\\11/3\end{pmatrix} \quad \text{Ok!}$$

$$\text{Svar: } \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-4&1\\7&-1\end{pmatrix}$$

$$\text{Alternativt kan man lösa det simultana systemet } \left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3&0\\2&1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\text{vilket ger svar lite snabbare.}$$

Nu till linjära avbildningar under koordinattransformationer. När en vektor avbildas kan vi skriva det som $\vec{y}_e=A_e\vec{x}_e$, där $\vec{y}_e$ är avbildningen och A_e avbildningsmatrisen i **e**-systemet.

Vi har att: $\vec{x}_e=C\vec{x}_f$ och $\vec{y}_e=C\vec{y}_f$, så $C\vec{y}_f=A_eC\vec{x}_f \Rightarrow \vec{y}_f=C^{-1}A_eC\vec{x}_f$.
Vilket ger oss att: $C^{-1}A_eC=A_f$!

Exempel:

$$\text{Bestäm avbildningsmatrisen i } \boldsymbol{f}-\text{systemet för den linjära avbildning som i}$$
$$\boldsymbol{e}-\text{systemet är en spegling i linjen } x=y.$$

$$A_e=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad (\text{spegling i } x=y) \quad A_f=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}.$$
$$\Rightarrow A_f=-\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix} \quad \text{Ok!}$$

$$\text{Svar: } A_f=\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix}.$$

Slut / it03_wsv@it.kth.se