561139 , 061204

#3 $\mathrm{Range}(A) = \mathrm{Span}(\{b_1, b_2\})$,

$b_1 = (1\ 2\ 3)^t$, $b_2 = (1\ 1\ -1)^t$.

$b_1 \perp b_2 \implies w = P_{\mathrm{Range}(A)}((1\,0\,0)^t)$

$$= \frac{\langle b_1, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\rangle}{|b_1|^2}\, b_1 + \frac{\langle b_2, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle}{|b_2|^2} \cdot b_2$$

$$= \frac{1}{14} b_1 + \frac{1}{3} b_2 = \frac{1}{42}\begin{pmatrix}17\\20\\-5\end{pmatrix}$$

#4 Lösning av $Ax = 0 \implies$ bas för $\ker(A)$ ges av $v_1 = (-3\ 0\ 1\ 1)^t$, $v_2 = (-7\ 1\ 0\ 1)^t$.

GRAM-SCHMIDT:

$b_1 = v_1 = (-3\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^t$

$b_2 = v_2 - \dfrac{\langle b_1, v_2\rangle}{|b_1|^2} \cdot b_1 = (-1\ \ 1\ \ -2\ \ -1)^t$

#5 GRAM-SCHMIDT på $W \Rightarrow b_1 = 1,\ b_2 = t/2 - 1$

är ortogonal bas för W.

$$\left.\begin{aligned} &\langle 1, 1 \rangle = 1 \\ &\langle t - 1/2,\ t - 1/2 \rangle = 1/12 \\ &\langle 5t^3 + 2t^2,\ 1 \rangle = 23/12 \\ &\langle 5t^3 + 2t^2,\ t - 1/2 \rangle = 13/24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_W(5t^3 + 2t^2 + 3t + 4) = 3t + 4 + \frac{23}{12} \cdot 1 + \frac{13}{2}(t - 1/2)$$

$$= \frac{19t}{2} + 8/3$$

#6 $A^2 > 0 \Rightarrow A$ har <u>en</u> neutralt stabil mod.

Lös $Ab_1 = 1 \cdot b_1 \Rightarrow b_1 = (12\ \ 23\ \ 74)$

$A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow c_1 b_1$ där $c_1 b_1$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

har samma kolonnsumma $\Rightarrow c_1 = \frac{6}{109}$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} A^n x(0) = \frac{6}{109} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 74 \end{pmatrix}$$

#7 Låt B vara ON-bas av egenvektorer.

Då är $[A]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$

och B ~~en~~ ON-bas $\Rightarrow [A^*]_B = [A]_B^* = D^* = \overline{D}$.

$\therefore [A^* A]_B = [A^*]_B [A]_B = \overline{D} D = D \overline{D} =$

$= [A]_B [A^*]_B = [A A^*]_B$

$\therefore A^* A = A A^*$.

#8 n distinkta egenvärden $\Rightarrow$ A diagonaliserbar.

Låt $b_1, \dots, b_n$ vara bas av egenvektorer för A:

$A b_i = \lambda_i b_i$.

Låt $v = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Då är $v, Av, \dots, A^{n-1} v$

oberoende (och spänner alltså upp $\mathbb{R}^n$)

ty: $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j v = 0$

$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_i^j b_i \Rightarrow$ (då $b_1, \dots, b_n$ oberoende)

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_i^j = 0 \quad \forall i$, dvs polynomet

$p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t^j$ är noll för $t = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Men: $\mathrm{grad}(p(t)) \leq n-1 \Rightarrow$ alla $\alpha_j = 0$

dvs $v, Av, \dots, A^{n-1} v$ är <u>oberoende</u>