5B1139, 060111

3. $\det(A_s) \neq 0 \Rightarrow$ unik lösning finns
$\det(A_s) = 0 \Rightarrow s = \pm 2$.

$A_2 x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \end{pmatrix}$ (oändligt många)
$A_{-2} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ saknar lösning.
$\therefore$ $s \neq \pm 2$: 1 lösning
$s = 2$: ∞ många lösningar
$s = -2$: inga lösningar

4. $P_A(\lambda) = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = -(\lambda - 2)^3$.
$\therefore$ A diagonaliserbar $\Longleftrightarrow$ $\dim(E_2) = 3$.
Lös $(A - 2I)x = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \dim(E_2) = 2 < 3$
$\therefore$ A ej diagonaliserbar.

5 Gram Schmidt på $\{1, t, t^2\}$ ger att
$\{1, t, t^2 - 1/3\}$ är ortogonal bas för $\mathbb{R}_2[t]$.
$P_W(5t^3 + 2t^2 + 3t + 4) = P_W(5t^3) + 2t^2 + 3t + 4$:

$$P_W(t^3) = \frac{\langle t^3, t \rangle}{\langle t, t \rangle} t = \frac{3}{5} t$$

(notera att $\langle t^3, 1 \rangle = \langle t^3, t^2 - 1/3 \rangle = 0$)

$\therefore P_W(5t^3 + 2t^2 + 3t + 4) = 2t^2 + 6t + 4$

6 Låt $B = 10A$. Kol. summa i $B = 10$

$\Rightarrow \lambda_1 = 10$ är egenvärde till B.

Låt λ_2, λ_3 vara rötter till

$P_B(\lambda) = 0$. Då är

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(B) = 50 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(B) = 16\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_2 \lambda_3 = 5 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 6\end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5.$$

$\therefore$ Egenvärden till A är $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1/10, \mu_3 = 1/2$.

(A är diagonaliserbar)

Låt b_1, b_2, b_3 vara motsvarande egenvektorer till A

$x(0) = \binom{2}{2} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i b_i$;

$x(n) = A^n x(0) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i^n \alpha_i b_i \rightarrow \alpha_1 b_1$

där b_1 är en lösning till $(A-I)b_1 = 0$

$\Rightarrow b_1 = (7\ 3\ 5)^t$

$x(0)$ & $\alpha_1 b_1$ har samma kolonnsumma $\Rightarrow \alpha_1 = 2/5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x(n) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$$

7 1) $B = A^t A \Rightarrow B^t = B$; B är diagonaliserbar

2) $Bv = \lambda v \Rightarrow \lambda |v|^2 = \langle v, \lambda v\rangle =$

$= \langle v, Bv\rangle = \langle v, A^t A v\rangle =$

$= \langle (A^t)^t v, Av\rangle = \langle Av, Av\rangle = |Av|^2$

$\therefore \lambda |v|^2 = |Av|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$

$\underline{8}$ $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$

Så enligt dimensionssatsen räcker det att visa att F är injektiv.

Men: $F(p(x)) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = \dots = p(\alpha_{n+1}) = 0$

dvs p är ett polynom med $n+1$ <u>olika</u> nollställen $\Rightarrow$

$p(x)$ är nollpolynomet.

$\therefore$ F är injektiv.