5B1139 (050110)

3 Lös $A^tAx = A^tb$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ lös $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = 1/5 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

och $v = Ax = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$.

4 Låt $v_1 = 1+t$, $v_2 = 1-t$, $v_3 = 1+t+t^2$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$L(v_1) = 1+2t = 3/2\, v_1 - v_2/2$$
$$L(v_2) = 1-2t = -v_1/2 + 3/2\, v_2$$
$$L(v_3) = 1+2t+3t^2 = 3v_3 - v_2/2 - 3/2\, v_1$$

$\therefore \quad [L]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

5 Låt $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$P_A(\lambda) = 0$ har lösningarna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/\sqrt{12}$, $\lambda_3 = -1/\sqrt{12}$.

Notera att $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

Skriv $x(0) = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i$ där $Av_i = \lambda_i v_i$.

(och $v_1 = (1\,1\,1)^t$).

$A^t = A \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ ortogonala

och vi ser att $c_1 = \langle x(0), v_1\rangle / \langle v_1, v_1\rangle = 2$

$x(n) = A^n x(0) = \sum_{i=1}^{3} c_i \lambda_i^n v_i \longrightarrow c_1 v_1 = (2\,2\,2)^t$

då $n \to \infty$.

6. Gram-Schmidt ger att
$1,\ t-\frac{1}{2},\ t^2-t+\frac{1}{6}$ är ortogonal bas för $\mathbb{R}_2[t]$.

$$P(t^3)= \frac{\langle t^3, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 + \frac{\langle t^3, t-\frac{1}{2}\rangle}{\langle t-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\rangle}\cdot (t-\tfrac{1}{2}) + \frac{\langle t^3, t^2-t+\frac{1}{6}\rangle}{\|t^2-t+\frac{1}{6}\|}\cdot \left(t^2-t+\tfrac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$$

7. Låt $\mathcal{B}$ vara bas så att
$[A]_{\mathcal{B}} = D_1$, $[B]_{\mathcal{B}} = D_2$ där
D_1 & D_2 är diagonala matrisen.

Då är $[AB]_{\mathcal{B}} = [A]_{\mathcal{B}}\cdot[B]_{\mathcal{B}} = D_1 D_2 = D_2 D_1 =$

$$= [B]_{\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}} = [BA]_{\mathcal{B}}$$

$\therefore$ $[AB]_{\mathcal{B}} = [BA]_{\mathcal{B}} \Rightarrow AB = BA$.

(om $[T_1]_{\mathcal{B}} = [T_2]_{\mathcal{B}}$ så är $T_1 = T_2$).

8 Vi noterar att $|A^t| = |A|$ och
att om $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ så är
$|A|^2 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$. O ortogonal $\Rightarrow |O^{-1}v_i| = |v_i|$

$$\Rightarrow |O^{-1}A|^2 = \sum_{i=1}^{n} |O^{-1}v_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|v_i|^2 = |A|^2.$$

$\therefore$ $|O^{-1}AO|^2 = |AO|^2 = |(AO)^t|^2 = |O^{-1}A^t|^2 = |A^t|^2 = |A|^2$

$\therefore$ $|O^{-1}AO| = |A|$.