Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1139
LINJÄR ALGEBRA F1 (SPECIALKURS)
7 POÄNG
Onsdagen den 11 januari, 2006, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För godkänt betyg (3) krävs 50% , medan för betyg 4 krävs 65%, och för betyg 5, 75%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.) Lösningarna skall motiveras väl.

Teoriuppgifter

1. Låt $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vara egenvektorer som hör till olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ för en linjär avbildning L. Visa att $b_1, b_2, \ldots, b_n$ är oberoende.

(3p)

2. Låt A vara en $m \times n$ matris, och låt $b \in \mathbb{R}^m$. Visa att $x \in \mathbb{R}^n$ är en minstakvadratlösning till $Ax = b$ om och endast om $A^t Ax = A^t b$.

(3p)

Problemuppgifter

3. Låt
$$A_s = \begin{pmatrix} 4 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$
För vilka reella värden på s har ekvationen
$$A_s x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
noll, en, eller oändligt många lösningar?

(3p)

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$
Är A diagonaliserbar?

(3p)

V.G.V.

5. På det linjära rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = 5t^3 + 2t^2 + 3t + 4$ på W.

(3p)

6. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (1, 2, 3)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!

(3p)

Bevis

7. Låt A vara en reell $n \times n$ matris, och låt $B = A^t A$. Visa först att B är diagonaliserbar. Visa sedan att om λ är ett egenvärde till B så är $\lambda \geq 0$.

(3p)

8. Givet $n+1$ distinkta reella tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, definiera en linjär avbilding $F : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$ genom att låta

$$F(p(x)) = (p(\alpha_1), p(\alpha_2), \ldots, p(\alpha_{n+1}))^t$$

Visa att F är surjektiv.

(3p)