Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1139
LINJÄR ALGEBRA F1 (SPECIALKURS)
7 POÄNG
Måndagen den 10 januari, 2005, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För godkänt betyg (3) krävs 50% , medan för betyg 4 krävs 65%, och för betyg 5, 75%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.) Lösningarna skall motiveras väl.

Teoriuppgifter

1. Låt A vara en $m \times n$ matris, och låt $b \in \mathbb{R}^m$. Visa att $x \in \mathbb{R}^n$ är en minstakvadratlösning till $Ax = b$ om och endast om $A^t Ax = A^t b$.

   (3p)

2. Låt $F : V \to V$ vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligdimensionellt Euklidiskt rum. Visa att F har en bas av ortonormerade egenvektorer. (3p)

Problemuppgifter

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Finn den vektor $w \in \text{Range}(A)$ som ligger närmast punkten $(1, 0, -2)^t$.

   (3p)

4. Betrakta den linjära operator L på $\mathbb{R}_2[t]$ (rummet av andragradspolynom) som definieras av

$$L(p(t)) = t \cdot p'(t) + p(t)$$

   Bestäm matrisen för L i basen

$$1 + t, 1 - t, 1 + t + t^2$$

   (3p)

V.G.V.

5. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (1,2,3)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!

(3p)

6. På det linjära rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t^3$ på W.

(3p)

Bevis

7. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum. Antag att $A : V \to V$ och $B : V \to V$ är två *simultant diagonaliserbara* operatorer. Visa att $AB = BA$.

(3p)

8. På rummet av reella $n \times n$ matriser definierar vi en norm genom att låta

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

där $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ är matriselementen för A. Visa att normen är invariant under ortogonala basbyten, dvs att $|O^{-1}AO| = |A|$ om O är en ortogonal $n \times n$ matris.

(3p)