EXEMPEL PÅ TENTAMENSUPPGIFTER (5B1139 HT 05)

Ungefärligt upplägg på tentan: Totalt 8 stycken uppgifter, varav 2-3 teoriuppgifter, 4-5 räkneuppgifter, samt 1-2 bevis (likt de bevis ni gjort som inlämningsuppgifter). Eventuellt 1 "kluring". 3 poäng per uppgift (preliminärt).

Approximativa betygsgränser (inklusive inlämningsuppgifter, med 20 procents vikt): Betyg 3: $\geq 50\%$. Betyg 4: $\geq 65\%$. Betyg 5: $\geq 75\%$.

1. Teoriuppgifter

Bevis som finns i boken eller gåtts igenom på föreläsningarna. (Fullständig lista på satser som kan dyka upp kommer att delas ut senare.)

- Låt A och B vara två diagonaliserbara kvadratiska matriser som kommuterar. Visa att A och B är *simultant* diagonaliserbara.
- Definera först vad som menas med en Hermitsk matris! Visa sedan att en godtycklig Hermitsk matris har reella egenvärden och är diagonaliserbar!
- Låt A och B vara två kvadratiska matriser som kommuterar. Visa att B avbildar varje egenrum till A på sig självt. (OBS: Det är inte sagt att A eller B är diagonaliserbara!)
- Låt $L : V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att $\mathrm{Im}(L)$ är isomorft med kvotrummet $V/\ker(L)$.
- Låt U vara en unitär $n \times n$-matris. Visa att U är diagonaliserbar.
- Låt A vara en reell $m \times n$ matris, och låt $b \in \mathbb{R}^m$. Visa att x är en minsta-kvadrat lösning till $Ax = b$ om och endast om x är en lösning till $A^tAx = A^tb$!

2. Räkneuppgifter

- Den linjära operatorn L på $\mathbb{R}^3$ har matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
i basen
$$(1,1,0)^t,\ (1,0,1)^t,\ (0,1,1)^t.$$
Bestäm matrisen för L i standardbasen i $\mathbb{R}^3$.
- Definera $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ genom
$$L((x_1,x_2,x_3,x_4)^t) = (x_2,x_1,x_4,x_3)^t.$$
Vad är L:s matris is standardbasen (dvs basen $B = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$) för $\mathbb{R}^4$? Bestäm sedan L:s egenvärden och egenvektorer!
- Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (0,1,0)^t$ och
$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$
Bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$!
- Visa att lösningen till systemet
$$\begin{cases} dx/dt &= -0.4x(t) - 0.2y(t), \quad x(0) = 1 \\ dy/dt &= -0.2x(t) - 0.1y(t), \quad y(0) = 1 \end{cases}$$
har ett gränsvärde då $t \to \infty$ och bestäm detta gränsvärde!
- Definera $L : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^4$ genom
$$L(p) = (p(0), p(1), p(2), p(3))^t.$$
Vad är L:s matris relativt standardbaserna för $\mathbb{R}_2[t]$ respektive $\mathbb{R}^4$ (dvs baserna $B = \{1, t, t^2\}$ och $B' = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$)?

- Definera följden $x(n)$ med formeln $x(n+1) = Ax(n)$ där $x(0) = (0,1,0)^t$ och
$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
Visa att A har egenvärdena 0.5 och 1 samt bestäm $\lim_{n\to\infty} x(n)$.
- Visa först att matrisen
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
representerar en rotation på $\mathbb{R}^3$. Finn sedan rotationsaxel och rotationsvinkel.
- På det linjära rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom p betraktar man skalärprodukten
$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$
Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ på W.

3. Bevis

- Se inlämningsuppgifter.
- Låt $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vara en kolonnvektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att det finns ett tal c så att
$$U = I - c\mathbf{a}\mathbf{a}^t$$
är en spegling i ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Beskriv detta underrum!
- Låt A vara en reell symmetrisk 3×3 matris med följande egenskaper:
$$A^2 = A, \quad A \neq 0, \quad \text{Range(A)} \neq \mathbb{R}^3$$
Visa att A är en ortogonal projektion på en linje eller ett plan. (Ledtråd: Vad kan du säga om egenvärdena till A?)