KTH Matematik — 5B1135 Tentamen för I

Harald Lang — 7/11-05 kl 8.00–13.00

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

Observera: De som har godkänd lappskrivning 1 skall inte göra uppgift 1, och de som har godkänd lappskrivning 2 skall inte göra uppgift 2. Du kan kontrollera på listan som finns i salen vilka lapprskrivningar du har fått godkända.

För betyget tre krävs 16p (inklusive ev. tillgodoräknande av uppgift ett och två.) Den som får 15p. har möjlighet att komplettera till betyget tre — den som önskar detta skall kontakta Harald Lang inom en vecka efter att tentamensresultatet offentliggjorts.

---

1. Förenkla uttrycket $\cos(2\arctan 3)$ så långt som möjligt. (3p.)

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$ (3p.)

3. Bestäm Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = e^{-x}\sin(2x)$ tom. 4-e graden. Ange resttermen så att dess storleksordning framgår. (3p.)

4. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x}$ (3p.)

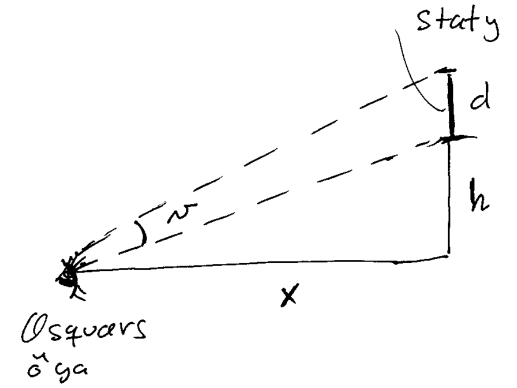
5. Lös fullständigt differentialekvationen $y''(t)+7y'(t)+12y(t)=13e^{-t}\cos(2t)$. (3p.)

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$. (4p.)

7. Bevisa att $13^n + 6^{n+1}$ är delbart med 7 för $n = 1, 2, \ldots$. (4p.)

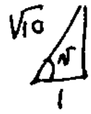
8. Vid tidpunkten $t = 0$ är bankkontot tomt, men då börjar man sätta in pengar i en jämn ström a kronor per år. Under tiden får man andelen r per år i ränta (dvs. $100r\%$,) som också kontinuerligt läggs till kontot. Bestäm kontots saldo efter T år. (4p.)

9. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ (4p.)

10. 

Osquar tittar på en staty som står på en piedestal. Foten på statyn står på höjden h över Osquars ögon, och statyn är d hög. På vilket avstånd x skall Osquar stå från statyn för att han skall se den under maximal vinkel v? (4p.)

KTH Matematik   Lösningsförslag till tentamen
Harald Lang   i 5B1135 för I 7/11-05.

1. Låt $v = \arctan 3$  Vi ser att $\cos v = \frac{1}{\sqrt{10}}$ och $\sin v = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Alltså är $\cos(2\arctan 3) = \cos(2v)$
$= \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = \underline{\underline{-0.8}}$.

2. Vi gör substitutionen $1-x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$;

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{t}\underbrace{(2x\,dx)}_{-dt} = -\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

3. Vi använder de kända Maclaurinutvecklingarna
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$ och $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$
Om $c_i(x)$ får beteckna funktioner som är kontinuerliga för $x = 0$ har vi nu:

$$\underline{\underline{e^{-x}\sin(2x)}} = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + c_1(x)x^4\right)\left(2x - \frac{8x^3}{3!} + c_2(x)x^5\right)$$

$$= 2x - 2x^2 + \left(1 - \frac{8}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{8}{3!} - \frac{2}{3!}\right)x^4 + c_3(x)x^5$$

$$= \underline{\underline{2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^4 + c_3(x)x^5}}.$$

Eftersom resttermen är av rätt storleksordning är detta Maclaurinutvecklingen, enligt entydighetssatsen.

4. Låt $x^{1/6} = t \to 1$ då $x \to 1$. $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.
Vi får: $$\lim_{x\to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x} = \lim_{t\to 1} \frac{1 + 2t^3 - 3t^2}{36\ln^2 t} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{6t^2 - 6t}{36\cdot 2\cdot t^{-1}\ln t} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3 - t^2}{12\ln t} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{3t^2 - 2t}{12t^{-1}} = \frac{3-2}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

5. Ekvationens karakteristiska polynom är $p(r) = r^2 + 7r + 12$ som har nollställena $r=-3$ och $r=-4$. ~~Låt~~ Den homogena lösningen $y_h(t)$ är alltså $y_h(t) = Ae^{-3t} + Be^{-4t}$. Vi söker nu en partikulärlösning $y_p(t)$. Låt $y_p(t) = u(t)e^{-t}$. Förskjutningsregeln ger då

$$u''(t) + p'(-1)u'(t) + p(-1)u(t) = 13\cos 2t, \text{ dvs}$$
$$u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = 13\cos 2t.$$

Ansätt $u(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$. Insättning ger

$$(2C_1 + 10C_2)\cos 2t + (2C_1 - 10C_2)\sin 2t = 13\cos 2t$$

Vi får en lösning om $\begin{cases} 2C_1 + 10C_2 = 13 & (1) \\ 2C_1 - 10C_2 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) ger $\underline{C_2 = 5C_1}$ som insatt i (1) ger $\underline{\underline{C_1 = \frac{1}{4}}}$ och alltså $\underline{\underline{C_2 = \frac{5}{4}}}$. Alltså $u(t) = \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{5}{4}\sin 2t$.

En partikulärlösning är alltså
$y_p(t) = \frac{1}{4}e^{-t}\cos 2t + \frac{5}{4}e^{-t}\sin 2t$, och hela lösningen till diff.-ekvationen är

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{4}e^{-t}\cos 2t + \frac{5}{4}e^{-t}\sin 2t + Ae^{-3t} + Be^{-4t}}}$$

6. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \int_0^\infty \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1) - \ln(x+3)\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x+3}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right) + \frac{1}{2}\ln 3$$

$$= \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 3}}$$

7. Vi bevisar påståendet (*): "$13^n + 6^{n+1}$ är delbart med 7" för $n = 1, 2, \ldots$ med induktion.

1. För $n=1$ är (*) sant, ty $13^1 + 6^2 = 49 = 7 \cdot 7$.

2. Vi visar nu att om (*) är sant för $n = 1, 2, \ldots, m-1$, så följer att (*) också är sant för $n = m$.

Av induktionsantagandet (att (*) är sant för $n = 1, 2, \ldots, m-1$) följer speciellt att $13^{m-1} + 6^m = 7k$ för något heltal k, dvs. $13^{m-1} = 7k - 6^m$.

Nu har vi: $\underline{13^m + 6^{m+1}} = 13^{m-1} \cdot 13 + 6^{m+1}$

$= (7k - 6^m) \cdot 13 + 6^{m+1} = 7 \cdot 13\,k - (13-6) \cdot 6^m$

$= 7 \cdot (13k - 6^m)$, vilket visar att (*) är sant för $n = m$. Därmed är (*) visat för alla $n = 1, 2, \ldots$, enligt induktionsprincipen.

8. Låt $y(t)$ vara saldot vid tiden t (år). Vi har $y(0) = 0$. Vi betraktar nu hur mycket saldot ökar, $y(t+\Delta t) - y(t)$, under tidsperioden t till $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$). Under denna tid sätter man in $a\Delta t$ kronor. Dessutom får man ränta, och räntan är $y(\xi) r \Delta t$ kronor för något $\xi \in [t, t+\Delta t]$. Ty, ~~ty~~ sätter vi $\xi = t$ har vi något underskattat räntan (vi antar att $r \geq 0$), ~~ty~~ och sätter vi $\xi = t + \Delta t$ har vi något överskattat den. Alltså har vi likhet för något ξ där emellan.

[Anm: Det är OK att ~~vara~~ resonera mer heuristiskt här!!]. Alltså har vi

$$y(t+\Delta t) - y(t) = a\Delta t + y(\xi) r \Delta t$$

(8 forts.) Enligt medelvärdessatsen gäller nu

$$y'(\theta)\Delta t = a\Delta t + y(\xi) r \Delta t, \quad \text{ngt } \theta \in (t, t+\Delta t)$$

Vi dividerar med Δt och låter $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dy}{dt} = a + y(t) r.$$

Detta är en separerbar differentialekvation. Eftersom $y(0) = 0$ får vi

$$\int_0^y \frac{dy}{a+yr} = \int_0^T dt$$

dvs $T = \left[\frac{1}{r} \ln(a+ry)\right]_{y=0}^{y} = \frac{1}{r}\left(\ln(a+ry) - \ln a\right)$

$$= \frac{1}{r} \ln\left(1 + \frac{ry}{a}\right).$$

Alltså $\frac{1+ry}{a} = e^{rT}$ som ger $\underline{\underline{y(T) = a\frac{e^{rT}-1}{r}}}$

9. Det snabbaste sättet att få fram svaret är att göra substitutionen $\sqrt{x^2+1} = t$. Jag visar emellertid en lösning baserad på "standard-metoden". Gör substitutionen $x = \sinh t$, $dx = \cosh t\, dt$ och låt a uppfylla $1 = \sinh(a)$. Vi har då

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_a^\infty \frac{\cosh t\, dt}{\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1}} = \int_a^\infty \frac{dt}{\sinh t}$$

$$= \int_a^\infty \frac{2\,dt}{e^t - e^{-t}} = \int_a^\infty \frac{2e^t\, dt}{e^{2t}-1} \ldots \quad \text{Sätt nu } e^t = u, \quad e^t dt = du$$

$$\ldots = \int_{e^a}^\infty \frac{2\,du}{u^2-1} = \int_{e^a}^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \text{(forts)}$$

(9 forts)

$$= \left[\ln(u-1)-\ln(u+1)\right]_{e^a}^{\infty} = \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{e^a}^{\infty}$$

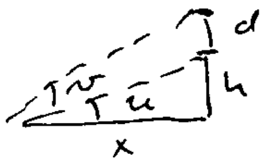
$$= \underbrace{\lim_{u\to\infty}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\right)}_{=0} - \ln\frac{e^a-1}{e^a+1} = \ln\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right).$$

Nu måste vi finna e^a. Vi har $1 = \underbrace{\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})}_{\sinh a}$ dvs $e^{2a}-2e^a=1$.

Alltså $(e^a-1)^2=2$; $e^a = 1 \underset{(-)}{+} \sqrt{2}$ [$e^a>0$, så minustecknet gäller inte). Vi får nu svaret:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(1+\sqrt{2}).$$

10. Inför vinkeln u i figuren:



Vi ser att $\tan(u+v) = \frac{d+h}{x}$ och $\tan u = \frac{h}{x}$, alltså $u+v = \arctan\left(\frac{d+h}{x}\right)$ och $u = \arctan\frac{h}{x}$. Vi får:

$v(x) = \arctan\left(\frac{d+h}{x}\right) - \arctan\left(\frac{h}{x}\right)$. Derivera:

$$v'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{d+h}{x}\right)^2}\cdot\frac{(-1)(d+h)}{x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}\cdot\frac{(-h)}{x^2} = \frac{d(hd+h^2-x^2)}{(x^2+h^2)(x^2+(d+h)^2)}$$

Vi ser att $v'(x)<0$ för $x>\sqrt{h(h+d)}$ och $v'(x)>0$ för $x<\sqrt{h(h+d)}$. Alltså är $v(x)$ växande för $x<\sqrt{h(h+d)}$ och avtagande för $x>\sqrt{h(h+d)}$. Alltså antar $v(x)$ sitt största värde för

$$x = \sqrt{h(h+d)}$$