KTH Matematik — Lösningar till 5B1135
Harald Lang — 11/1-06.

1. $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}(2x)^k\left(\frac{-1}{x^2}\right)^{11-k} = \sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}2^k(-1)^{11-k}x^{3k-22}$.

$\frac{1}{x}$-termen är den där $k=7$, alltså koefficienten är

$\binom{11}{7}2^7(-1)^4 = \underline{\binom{11}{7}2^7\ (=42\,240)}$.

2. $\int_0^\pi (2\sin^2 x+\sin^3 x)\,dx = 2\int_0^\pi \sin^2 x\,dx + \int_0^\pi \sin x(1-\cos^2 x)\,dx$.

Här är $2\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \left[x - x\sin x\cos x\right]_0^\pi = \pi$.

I den andra integralen substituerar vi $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$. $\int_0^\pi \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int_1^{-1}(1-t^2)\,dt$

$= \int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{4}{3}$. <u>Svar:</u> $\pi + \frac{4}{3}$

3. Karakteristiska polynomet är $p(r) = r^2-9$, $p'(r) = 2r$. $p(r)$ har rötterna $r = \pm 3$, alltså är $\underline{y_{hom} = Ae^{3x}+Be^{-3x}}$.

En partikulärlösning till högerledet 1 är uppenbarligen $y_1 = -\frac{1}{9}$. För att finna en partikulärlösning y_2 till högerledet e^{-x} sätter vi $y_2 = v e^{-x}$ och får enligt förskjutningsregeln $v'' + p'(-1)v' + p(-1)v = 1$, dvs. $v'' + 2v' - 8v = 1$ som uppenbarligen har en lösning $v = -\frac{1}{8}$. Alltså:

$$\underline{y = Ae^{3x} + Be^{-3x} - \frac{1}{9} - \frac{1}{8}e^{-x}}.$$

4. Vi vet att $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$.

$$\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} + c_1(x^2)x^{12}$$

$$-\left(-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{5} - c_2(x^2)x^{12}\right)$$

$$= \underline{2x^2 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^{10} + c(x)x^{12}}.$$ Här är c_1, c_2, c kontinuerliga funktioner.

5. Derivera $x^2 + y \equiv 2^y + x$ m.a.p. x:

$2x + y'(x) = 2^y(\ln y)\,y'(x) + 1$. För $x = 2, y = 2$ får vi

$4 + y'(2) = 4\ln(2)\,y'(2) + 1$, dvs. $y'(2) = \frac{3}{4(\ln 2) - 1}$.

Tangentens i $x = 2, y = 2$ ekvation är alltså

$$\underline{y - 2 = \frac{3}{4(\ln 2) - 1}(x - 2)}$$

6. Sätt $e^t - 1 = s^2$, $e^t = s^2 + 1$, $e^t\,dt = 2s$; $dt = \frac{2s}{1+s^2}$.

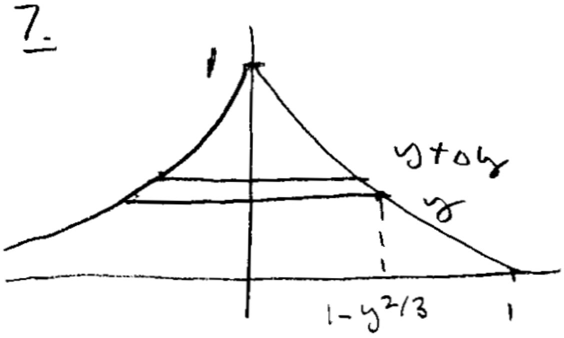
$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2\cancel{s}\,ds}{(1+s^2)\cancel{s}} = \Big[2\arctan s\Big]_1^{\sqrt{e^x - 1}}$$

$= 2\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$. Ekvationen är alltså

$$2\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \iff \arctan\sqrt{e^x - 1} = \frac{\pi}{3} \iff$$

$$\sqrt{e^x - 1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \iff e^x - 1 = 3 \iff e^x = 4 \iff \underline{\underline{x = \ln 4}}$$

7.



Låt $V(y)$ vara volymen upp till nivån y. Vi ser att

$$V(y+\Delta y) - V(y) \approx \pi\left(1 - y^{2/3}\right)^2 \Delta y.$$

Dividera med Δy och låt $\Delta y \to 0$: $V'(y) = \pi(1 - y^{2/3})^2$. Vi har nu

$$\underline{\underline{V(1)}} = V(1) - V(0) = \int_0^1 V'(y)\,dy = \int_0^1 \pi\left(1 - 2y^{2/3} + y^{4/3}\right)dy = \underline{\underline{\frac{8\pi}{35}}}$$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}+x^2\right)}{x^2} = \ldots$ Vi beräknar först

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$ Alltså

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}+x^2\right)}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos x - \sin x + 2x}{x\sin x + x^4}}{2x}$$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x + 2x}{2x^2\sin x + 2x^5} \ldots$ Nu är det enklast att använda Maclaurin. $c_i(x)$ betyder kontinuerliga funktioner. $\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+c_1(x)x^4\right) - x + \frac{x^3}{3!} + c_2(x)x^5 + 2x^3}{2x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+c_2(x)x^5\right)+2x^5}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{3}x^3 + c_3(x)x^5}{2x^3 + c_4(x)x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{3}+c_3(x)x}{2+c_4(x)\cdot x^2} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

9. Låt $f(x) = x^2+1-2^x$, $0 \le x \le 1$. Vi får $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2$, $f''(x) = 2 - 2^x(\ln 2)^2$. Vi ser att $f''(x) > 0$ för $0 \le x \le 1$, ty $2^x \le 2$ och $\ln 2 < 1$. Alltså är $f(x)$ konvex för $0 \le x \le 1$, dvs. grafen för $f(x)$ ligger under sin korda. Kordan genom $x=0$ och $x=1$ är x-axeln, alltså $f(x) \le 0$ för $0 \le x \le 1$, Q.E.D.

10. $y'(x) = \frac{e^y}{x+x^2}$, $y(1)=0$ ger $\int_0^y e^{-y}dy = \int_1^x \frac{dx}{x+x^2} = \int_1^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$

$= \left[\ln x - \ln(1+x)\right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln 2.$ $\int_0^y e^{-y}dy = 1 - e^{-y}$

Alltså $1 - e^{-y} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln 2$, $y = -\ln\left[1 - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \ln 2\right]$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} -\ln\left[1 - \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) - \ln 2\right] = \underline{\underline{-\ln(1-\ln(2))}}$$