

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Funktionen $y = f(x)$ är given genom sambandet

$$y + 0.2 \sin y = x + 0.4 \sin x$$

Bestäm $y'(0)$ och $y''(0)$ (3p.)

2. Bevisa olikheten

$$2x^3 - 12x + 10 \geq 3\pi - 12 \arctan x \quad \text{för } x \geq 0 \quad (3p.)$$

3. Lös differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \cos(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (3p.)$$

4. beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 4x} - x$ (3p.)

5. Beräkna integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sinh x} dx$. (3p.)

6. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2x}{x}, \quad 0 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

roterar kring y-axeln (sic!) (4p.)

7. Bevisa att

$$\sum_1^n \sin(kx) = \frac{\cos(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} - \frac{\cos((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} \quad (4p.)$$

8. Bestäm ett värde på $f(0)$ så att funktionen $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sin x}$,
 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ blir kontinuerlig för $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Beräkna därefter $f''(0)$
(funktionen kommer att ha derivator av alla ordningar.) (4p.)

9. Bestäm en primitiv funktion till

$$\frac{1}{1 + \sin x - \cos x} \quad (4p.)$$

10. Om en kula skjuts utt lodrät från jordytan kommer avståndet x , mätt från jordens medelpunkt, att uppfylla differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

där t är tid, R är jordens radie och g tyngdaccelerationen vid jordytan (det är alltså en konstant.) Bestäm flykthastigheten v_0 , dvs. den hastighet som är sådan att om utgångshastigheten överstiger v_0 så kommer $x \rightarrow \infty$, medan om utgångshastigheten understiger v_0 så gäller inte detta.

Det är lämpligt att införa hastigheten $v(x) = \frac{dx}{dt}$ som en funktion av x som beroende variabel.

(4p.)