KTH Matematik
Harald Lang

Maclaurins formel

Den variant man normalt använder av Maclaurins formel ser ut så här:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + c_n(x) x^n, \quad \text{där} \tag{1}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{och} \tag{2}$$

$$c_n(x) \text{ är kontinuerlig i närheten av } x = 0 \text{ med} \tag{3}$$

$$c_n(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{4}$$

Vi har också en *entydighetsstats* som säger att om (1) och (3) gäller, så är också (2) och (4) uppfyllda. Alltsammans förutsätter att funktionen $f(x)$ är n gånger kontinuerligt derivetbar i närheten av $x = 0$.

Exempel

Vi har enligt formeln för geometrisk summa att

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Alltså:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} \tag{5}$$

Här är sista termen av typen $c_n(x)x^n$, där $c_n = \frac{1}{1-x}$. Alltså är formeln (5) Maclaurin-utveclkingen av funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Till exempel kan vi dra slutsatsen att $f^{(4)}(0) = 4!$.

Exempel på gränsvärdes-beräkning

Vi använder Maclaurin-utvecklingarna i Sats 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + c_4(x)x^4)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} - c_4(x)x^2 = \frac{1}{2} + c_4(0)0^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Maclaurin-utvecklingar förekommer mycket ofta i tillämpningar. Man har behov av att approximera komplicerade uttryck i närheten av något värde; du kommer säkert att stöta på dem flera gånger i andra ämen här på KTH. Det finns en motsvarighet till Maclaurin-utvecklingar för funktioner i flera variabler, och ofta är det denna mer generella form som används. Jag anser att Maclaurin-utvecklingar är ett av de viktigaste momenten i den här kursen.

Det är praktiskt att kunna vissa Maclaurin-utvecklingar utantill, eftersom man kommer mycket långt med dessa utan att behöva göra mödosamma kalkyler.

Utantill:

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\
&\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\
&\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\
&\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \\
&(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Här betyder prickarna $\cdots$ att man fortsätter utvecklingen till någon lämplig potens x^{n-1} och att man sedan har en ”restterm” av typen $c_n(x)x^n$. Funktionen c_n beror naturligtvis inte bara på n utan också på vilken funktion man utvecklar.

Ett exempel från mekaniken

Här är ett exempel på användning av Maclaurins formel i en tillämpning. Enligt relativitetsteorin är rörelseenergin hos en partikel med hastigheten v och massan m

$$E = mc^2\Big[\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} - 1\Big]$$

Här är c =ljustets hastighet. I normalfall är v mycket mindre än c. Låt oss införa $x = -\frac{v^2}{c^2}$. Vi har då

$$E = mc^2\big((1+x)^{-\frac{1}{2}} - 1\big)$$

Nu Maclaurin-utvecklar vi

$$
\begin{aligned}
E &= mc^2\big(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + C_3(x)x^3 - 1\big) \\
&= mc^2\big(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + C_3(x)x^3\big) \\
&= mc^2\Big(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + C_3\Big(\frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{v^6}{c^6}\Big) \\
&= \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + C_3\Big(\frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{mv^6}{c^4}
\end{aligned}
$$

(Jag använder stort C för resttermen så man inte förväxlar den med ljushastigheten.) Här känner vi igen den första termen: i klassisk mekanik är rörelse-energin just $\dfrac{mv^2}{2}$. Den andra termen är den *första korrektionstermen;* den är mycket liten för måttliga hastigheter v, eftersom c^2 förekommer i nämnaren, och c är stort. Den tredje termen är en "restterm"; den är ännu mycket mindre än den andra, eftersom den har c^4 i nämnaren.

Vi ser alltså hur Maclaurins formel hjälper oss att se sambandet mellan energin i relativitetsteorin och i klassisk mekanik, och hur mycket de skiljer sig åt.

Resttermen i Maclaurins formel

Ett sätt att härleda ett uttryck för resttermen i Maclaurins formel ges i bokens kapitel 9; det bygger på partiell integration och "generaliserade medelvärdessatsen" för integraler (SATS 8 kapitel 6.4.) Om vi nöjer oss med Lagranges restterm, eller uttrycket $c_n(x)x^n$, så kan vi använda en något enklare metod.

Låt $f(x)$ vara en given funktion, deriverbar åtminstone n gånger, och definiera p_n som Maclaurin-polynomet av grad $n-1$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Då har $p_n(x)$ och $f(x)$ samma derivator upp t.o.m. ordning $n-1$ för $x=0$. Låt $R_n(x)$ vara resttermen:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

och definiera $c_n(x) = \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ för $x \neq 0$. Observera att $R_n(x)$ har derivatorna 0 för $x = 0$ upp t.o.m. ordning $n-1$. Vi kan nu med L'Hôpitals regel räkna ut gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} c_n(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} c_n(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\,x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ &= \frac{R^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\end{aligned}$$

Den sista likheten beror på att $p_n^{(n)}(x) = 0$.

Detta innebär att resttermen kan skrivas som $c_n(x)x^n$ där $c(x)$ är kontinuerlig i närheten av $x = 0$ om vi definierar $c(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Ett mer precist uttryck för resttermen är

Lagranges restterm:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n \text{ för något } \xi \text{ mellan 0 och } x$$

Den kan vi bevisa på nästan samma sätt, om vi påminner oss lemmat vi använde för att bevisa L'Hôpitals regel (se stencilen om L'Hôpitals regel:)

Lemma.

Antag att $f(a) = g(a) = 0$ där $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner. Låt $b \neq a$. Då finns ett tal ξ mellan a och b sådant att

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Vi kan nu få fram Lagranges restterm på ungefär samma sätt som ovan:

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{R_n'(x_1)}{nx_1^{n-1}} = \frac{R_n''(x_2)}{n(n-1)x_2^{(n-2)}} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

där x_1 ligger mellan 0 och x, x_2 ligger mellan 0 och x_1, o.s.v. Om vi döper x_n till ξ får vi Lagranges restterm.

Entydighet

Vi börjar med en hjälpsats:

Lemma.

Låt $p(t)$ vara ett polynom av grad $n-1$ och antag att $p(t) = t^n c(t)$ där $c(t)$ är en kontinuerlig funktion. Då är $p(t) \equiv 0$.

Bevis:

Låt $p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$. Sätter vi in $t = 0$ i relationen

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k = p(t) = t^n c(t)$$

ser vi att $a_0 = 0$. Vi kan nu dividera med t och får att

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k t^{k-1} = t^{n-1} c(t)$$

Detta gäller till att börja med för $t \neq 0$ (eftersom vi dividerat med t,) men eftersom bägge leden är kontinuerliga funktioner av t måste likheten gälla även för $t = 0$. Sätter vi nu in $t = 0$ ser vi att $a_1 = 0$, och vi kan åter dividera med t.

Genom att fortsätta på detta sätt ser vi att $a_k = 0$ för alla $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Q.E.D.*

Bevis för entydigheten:

Antag att

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k x^k + x^n c_1(x)$$

där $c_1(x)$ är kontinuerlig. Vi vet å andra sidan att enligt Maclaurins sats gäller

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k + x^n c(x)$$

där a_k ges av (2). Subtraherar vi dessa likheter får vi

$$0 = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - a_k) x^k + x^n \big(c_1(x) - c(x)\big)$$

Nu följer av lemmat att $c_k = a_k$ för $k = 1, 2, \ldots, n$, och därför också att $c_1(x) = c(x)$. *Q.E.D.*