

Vi har beräknat gränsvärdet med hjälp av "standardgränsvärden". Nu är ju derivator också gränsvärden, och derivator är de bäst kända gränsvärdena, så det känns naturligt att använda derivator som "standardgränsvärden". Detta utnyttjas i "L'Hôpitals regel". L'Hôpitals regel kommer i kapitel nio i boken, vilket jag tycker är alldeles för sent – den skall naturligtvis komma i så nära samband med gränsvärden som möjligt. Därför tar vi upp den nu.

L'Hôpitals regel

Antag att $f(a) = g(a) = 0$ där $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om det högra gränsvärdet existerar.

Vi illustrerar med ett exempel:

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Lösning:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= (\text{både täljare och nämnare} = 0 \text{ för } x = 0; \text{ använd L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = (\text{både täljare och nämnare} = 0 \text{ för } x = 0; \\ &\quad \text{använd L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

För beviset av L'Hôpitals regel behöver vi en hjälpsats:

Lemma.

Antag att $f(a) = g(a) = 0$ där $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner. Låt $b \neq a$. Då finns ett tal ξ mellan a och b sådant att

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bevis:

Bilda funktionen $h(x) = f(x)g(b) - f(b)g(x)$. Uppenbarligen gäller att $h(a) = 0$ och $h(b) = 0$. Alltså finns enligt medelvårdessatsen (sats 14 på sidan 202) ett tal ξ mellan a och b sådant att $h'(\xi) = 0$. Det gäller alltså att $f'(\xi)g(b) = f(b)g'(\xi)$, varav påståendet genast följer. *Q.E.D.*

Bevis för L'Hôpitals regel:

Låt $x \neq a$. Då finns enligt lemmat ett tal ξ mellan a och x sådant att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Om nu $x \rightarrow a$ så kommer givetvis $\xi \rightarrow a$, alltså

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

I sista ledet kan vi skriva x i stället för ξ , det är ju samma gränsvärde. Alltså är L'Hôpitals regel bevisad.