KTH Matematik
Harald Lang

Konvexa och konkava funktioner

En tolkning av tecknet för en funktions andraderivata kan formuleras geomtriskt:

Sats:

a) Om $f''(x) < 0$ i ett intervall, så
(ia) ligger dess graf över dess korda (fig s. 242)
(iia) ligger dess graf under dess tangent

b) Om $f''(x) > 0$ i ett intervall, så
(ib) ligger dess graf under dess korda (fig. nederst s. 241)
(iib) ligger dess graf över dess tangent (fig. sid 245)

I fallet a) sägs funktionen vara *konkav,* i fallet b) sägs den vara *konvex.*

Bevis

Vi visar fallet a). Låt $y = Ax + B$ vara kordan genom $\big(a, f(a)\big)$ och $\big(b, f(b)\big)$, där $a < b$. Betrakta funktionen $h(x) = f(x) - (Ax + B)$. Eftersom $h(a) = h(b) = 0$ följer av medelvärdessatsen att $h'(\xi) = 0$ för något $\xi \in (a, b)$. Men $h''(x) = f''(x) < 0$, så $h'(x)$ är avtagande, vilket medför att $0 = h'(\xi) > h'(x)$ för $\xi < x < b$, så $h(x)$ är avtagande där. Alltså gäller för dessa x-värden att $h(x) > h(b) = 0$, vilket visar att till höger om $x = \xi$ ligger grafen för $f(x)$ över kordan.

På samma sätt inser vi att även till vänster om $x = \xi$ ligger grafen för $f(x)$ över kordan: Också i intervallet $a < x < \xi$ gäller att $h'(x)$ är avtagande, så $h'(x) > h'(\xi) = 0$ där, dvs. $h(x)$ är växande där. Alltså gäller för dessa x-värden att $0 = h(a) < h(x)$, vilket visar att även till vänster om $x = \xi$ ligger grafen för $f(x)$ över kordan.

Därmed är (*ia*) bevisad.

För att visa (*iib*) betraktar vi tangenten $y = Cx + D$ i någon punkt $\big(c, f(c)\big)$ på f:s graf. Betrakta funktionen $g(x) = f(x) - (Cx + D)$ Nu gäller att $g(c) = 0$ och $g'(c) = f'(c) - C = 0$, eftersom $Cx + D$ är tangent.

$g''(x) = f''(x) < 0$, så $g'(x)$ är avtagande. Alltså gäller för $x > c$ att $g'(x) < g'(c) = 0$, dvs. $g(x)$ är avtagande där. Alltså gäller för $x > c$ att $0 = g(c) > g(x)$, dvs. f:s graf ligger under tangenten där.

För $x < c$ gäller fortfarande att $g'(x)$ är avtagande, så $g'(x) > g('c) = 0$ för dessa $x-$värden. Alltså är $g(x)$ växande i där, så $g(x) < g(c) = 0$, dvs. f:s graf ligger under tangenten även för $x < c$.

x:	a		ξ		b
h':		$+$	0	$-$	
h:	0	$\nearrow$	$h(\xi)$	$\searrow$	0

x:		c		
g':	$+$	0	$-$	
g:	$\nearrow$	0	$\searrow$	0

Exempel

Visa att $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Lösning: $\sin x$ är konkav i intervallet, ty $\frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x < 0$ där. Alltså ligger grafen för $\sin x$ ovanför kordan genom $(0, 0)$ och $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Detta ger olikheten.