KTH Matematik
Harald Lang

Integraler

Kapitel 5 i boken går litet väl långt när det gäller integrationsteknik. Vi inskränker oss till följande:

Rationella funktioner

Förstgrads-faktorer i nämnaren behandlas som vanligt. Men vi bryr oss inte om fallet då det finns en faktor $(x^2 + ax + b)^n$ med $n > 1$ i nämnaren (där polynomet saknar reella nollställen.) För fallet $n = 1$ är det bekvämt att utnytta ett par primitiver i utantill-listan: säg att vi har en term

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$$

som skall integreras. Vi kvadratkompletterar nämnaren:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} = \frac{Ax + B}{(x + c)^2 + d^2}$$

Substitutionen $x + c = t$ ger nu

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b}\,dx = \int \frac{At + B - Ac}{t^2 + d^2}\,dt &= \frac{A}{2}\ln(t^2 + d^2) + \frac{B - Ac}{d}\arctan\left(\frac{t}{d}\right)\\ &= \frac{A}{2}\ln(x^2 + ax + b) + \frac{B - Ac}{d}\arctan\left(\frac{x + c}{d}\right)\end{aligned}$$

Rotuttryck

Om man har ett rotuttryck $\sqrt{\text{andragrads-polynom}}$, där polynomet saknar reella nollställen, så kan man efter kvadratkomplettering och variabelsubstitution åstadkomma att man har ett av fallen

$$\begin{aligned}&(1) \quad \sqrt{1 - x^2}\\ &(2) \quad \sqrt{x^2 + 1}\\ &(3) \quad \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Vi kan då utnyttja "ettorna" för de trigonometriska och hyperboliska funktionerna: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ och $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Vi kan alltså göra följande substitutioner:

$$\begin{aligned}&(1) \quad x = \sin t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},\ dx = \cos t\,dt,\ \sqrt{1 - x^2} = \cos t\\ &(2) \quad x = \sinh t,\ t \ge 0,\ dx = \cosh t\,dt,\ \sqrt{x^2 + 1} = \cosh t\\ &(3) \quad x = \cosh t,\ t \ge 0,\ dx = \sinh t\,dt,\ \sqrt{x^2 - 1} = \sinh t\end{aligned}$$

Exempel

Bestäm en primitiv till $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ (jämför boken exempel 22, sid. 273.) Vi gör substitutionen

$$x = \sinh t,\ dx = \cosh t\, dt$$

och får:

$$\int \frac{dx}{(1+t^2)^{3/2}} = \int \frac{\cosh t\, dt}{\cosh^3 t} = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t$$

Den sista likheten här kan man gissa sig till (och sedan testa:) vi bör veta att $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$, och varje triginometrisk formel har en motsvarighet för hyperboliska funktioner. Vi kan nu fortsätta:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{\sinh t}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Ibland kan det vara naturligt att på slutet ersätta de hyperboliska funktionerna med exponentialfunktioner, och sedan substituera e^t och få en rationell funktion.)

Triginometriska funktioner

Här finns en hel del ad-hoc-trix som man får lära sig efter hand. Som sista utväg tar man till "tangens för halva vinkeln". Vi tittar på ett

exempel

Mercators kartprojektion har den stora fördelen för sjöfarare (åtminstone förr i tiden) att en fix kompasskurs är en rät linje på kartan, och kompassriktningen är densamma som vinkeln mot meridianen på kartan. När man gör en karta enligt Mercators projektion behöver man en skala på breddgrads-axeln som är en en primitiv till $\frac{1}{\cos x}$ Vi söker alltså $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Vi ser till att integrationsintervallet ligger inom $-\pi < x < \pi$ och sätter

$$x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Om vi tillfälligt betecknar $v = \arctan t$ har vi alltså

$$\cos x = \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{\cos^2 v + \sin^2 v} = \frac{1-\tan^2 v}{1+\tan^2 v} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Vi får alltså

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big)\, dt$$
$$= \ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = \ln\Big(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\Big) = \ln\Big(\frac{1+\sin x}{\cos x}\Big)$$

Den sista likheten lämnar jag som övning (elakt grin!)