KTH Matematik
Harald Lang

Separerbara differentialekvationer

Separerbara ekvationer

En separerbar differentialekvation är en ekvation av typen

$$\boxed{f(y)y'(x) = g(x)} \tag{1}$$

där $y(x)$ är den funktion som söks, medan $f(y)$ och $g(x)$ är givna. Exempel:

$$e^y y'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ekvationen har en unik lösning om vi också har ett randvärde $y(x_0) = y_0$. Vi betraktar (1) med detta randvärde. Låt $F(y)$ vara en primitiv till $f(y)$. Då kan vi skriva (1):

$$F'\big(y(x)\big)y'(x) = g(x)$$

Enligt kedjeregeln är vänsterledet derivatan av $F(y(x))$, dvs.

$$\frac{d}{dx}F\big(y(x)\big) = g(x) \tag{2}$$

Nu integrerar vi map. x från x_0:

$$\Big[F\big(y(x)\big)\Big]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

Egentligen är detta missbruk av beteckningar: integrationsvariabeln och övre gränsen för integrationen, x, skall inte vara densamma, men det är ett praktiskt missbruk, och missförstånd kan knappast uppstå.

Detta kan vi också uttrycka så här:

$$\Big[F(y)\Big]_{y_0}^{y(x)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

Här kan vänsterledet skrivas som en integral:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx} \tag{3}$$

Detta är precis vad vi får om vi i (1) formellt skriver $y'(x)$ som $\dfrac{dy}{dx}$ och multiplicerar med dx:

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

och sedan integrerar — detta är ett bra sätt att komma ihåg (3).

Exempel

Vi tar ett enkelt exempel. Låt $90 - 4x$ vara den högsta tillåtna hastigheten i km/tim på vägsträckan $0 \leq x \leq 10$. Vi vill veta hur lång tid det tar att köra den sträckan, om man kör i maximal tillåten hastighet. Eftersom hastigheten är derivatan av tillryggalagd sträcka $x(t)$ med avseende på tiden t, gäller att $x'(t) = 90 - 4x$. Vi startar vid tidpunkten $t = 0$ och kommer fram vid tiden T, och vi söker alltså denna restid T. Vi har alltså

$$\frac{dx}{dt} = 90 - 4x, \quad x(0) = 0 \text{ och } x(T) = 10$$

Vi multiplicerar med dt och dividerar med $90 - 4x$ och får

$$\frac{dx}{90 - 4x} = dt$$

och integrerar från $t = 0$ till $t = T$:

$$\int_0^{10} \frac{dx}{90 - 4x} = \int_0^T dt = T$$

som ger svaret $T = \frac{1}{4} \ln(\frac{9}{5})$.

Obestämda integraler

Ibland är det praktiskt att inte ange något randvillkor $y(x_0) = y_0$, utan att av (2) notera att $F\big(y(x)\big)$ är en primitiv till $g(x)$:

$$F\big(y(x)\big) = C + \int g(x)\, dx.$$

Eftersom $F(y)$ är en primitiv till $f(y)$ kan vi skriva detta

$$\boxed{\int f(y)\, dy = C + \int g(x)\, dx}$$

där C är någon konstant. Detta är ett alternativt sätt att skriva lösningen till (1). Det är viktigt att ta med konstanten C, annars är det lätt hänt att man inte får med alla lösningar, om man med obestämda integraler menar *någon* primitiv till integranden.