KTH Matematik
Harald Lang

5B1135 Modelltentamen för I

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Funktionen $y = f(x)$ är given genom sambandet
$$y + 0.2 \sin y = x + 0.4 \sin x$$
Bestäm $y'(0)$ och $y''(0)$ (3p.)

2. Bevisa olikheten
$$2x^3 - 12x + 10 \geq 3\pi - 12 \arctan x \quad \text{för } x \geq 0$$ (3p.)

3. Lös differentialekvationen
$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \cos(2t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$ (3p.)

4. beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$ (3p.)

5. Avgör om den volym som uppkommer då kurvan
$$y = \frac{1}{x^2 + x^{3/2}}, \quad 0 < x \leq 1$$
roterar kring y-axeln (sic!) är ändlig eller oändlig. (3p.)

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sinh x}\, dx.$ (4p.)

7. Bevisa att
$$\sum_0^n \cos(kx) = \frac{\cos(\frac{nx}{2}) \sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$ (4p.)

8. Bestäm ett värde på $f(0)$ så att funktionen $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}\, x)}{\sin x}$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ blir kontinuerlig för $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Visa därefter att $f'(0)$ existerar och beräkna dess värde. (4p.)

9. Bestäm en primitiv funktion till
$$\frac{1}{1 + \sin x - \cos x}$$ (4p.)

10. Ett gummiband med längden 1 meter sitter fast vänstra änden, medan bandet sträcks ut genom att den högra änden dras ut med en hastighet av a meter per sekund. Alla delar av bandet tänjs ut likformigt. En myra startar i vänstra änden och kryper längs bandet mot högra änden med en hastighet mot underlaget på b meter per sekund.

    Bestäm tiden det tar för myran att komma fram till högra ändpunkten. Vad är villkoren på hastigheterna a och b för att den någonsin skall komma fram?

    Ledning: Det kan vara lämpligt att tänka sig bandet uppdelat i små intervall, där dessa intervall följer med bandet vid uttänjningen. (4p.)