KTH Matematik
Harald Lang

Resttermen i Maclaurins formel

Ett sätt att härleda ett uttryck för resttermen i Maclaurins formel ges i bokens kapitel 9; det bygger på partiell integration och "generaliserade medelvärdessatsen" för integraler (SATS 8 kapitel 6.4.) Om vi nöjer oss med Lagranges restterm, eller uttrycket $c_n(x)x^n$ som i stencilen om Maclaurins formel, så kan vi använda en något enklare metod.

Låt $f(x)$ vara en given funktion, deriverbar åtminstone n gånger, och definiera p_n som Maclaurin-polynomet av grad $n-1$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Då har $p_n(x)$ och $f(x)$ samma derivator upp t.o.m. ordning $n-1$ för $x=0$. Låt $R_n(x)$ vara resttermen:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

och definiera $c_n(x) = \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ för $x \neq 0$. Observera att $R_n(x)$ har derivatorna 0 för $x=0$ upp t.o.m. ordning $n-1$. Vi kan nu med L'Hôpitals regel räkna ut gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} c_n(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} c_n(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\,x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\
&= \frac{R^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}
\end{aligned}$$

Den sista likheten beror på att $p_n^{(n)}(x) = 0$.

Detta innebär att resttermen kan skrivas som $c_n(x)x^n$ där $c(x)$ är kontinuerlig i närheten av $x=0$ om vi definierar $c(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Ett mer precist uttryck för resttermen är

Lagranges restterm:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n \text{ för något } \xi \text{ mellan 0 och } x$$

Den kan vi bevisa på nästan samma sätt, om vi påminner oss lemmat vi använde för att bevisa L'Hôpitals regel (se stencilen om L'Hôpitals regel:)

Lemma.

Antag att $f(a) = g(a) = 0$ där $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner. Låt $b \neq a$. Då finns ett tal ξ mellan a och b sådant att

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Vi kan nu få fram Lagranges restterm på ungefär samma sätt som ovan:

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{R_n'(x_1)}{nx_1^{n-1}} = \frac{R_n''(x_2)}{n(n-1)x_2^{(n-2)}} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

där x_1 ligger mellan 0 och x, x_2 ligger mellan 0 och x_1, o.s.v. Om vi döper x_n till ξ får vi Lagranges restterm.