KTH Matematik
Harald Lang

Kommentarer till inversa funktioner och cyklometriska funktioner

I framställningen av inversa funktioner så gör man så i boken, att man säger att inversen till

$$y = x^2 \quad \text{är} \quad y = \sqrt{x}$$

Jag tror detta kan vara förvirrande, och jag framställer det i stället så att inversen till

$$y = x^2 \quad \text{är} \quad x = \sqrt{y}$$

I tillämpningar står x och y för några storheter, och man byter givetvis inte namn. T.ex: sambandet mellan arean A och sidlängden d för en kvadrat är $A = d^2$. Ingen skulle nu komma på tanken att påstå att den inversa relationen är att $A = \sqrt{d}$.

Jag uppmanar lärarna att vara uppmärksamma på detta, så inte förvirring uppstår. T.ex. när man ritar grafen för en funktion och dess invers i samma diagram! Var tydliga.

Nu till behandlingen av cyklometriska funktioner.

Jag tror det här avsnittet är ganska svårt för studenterna, så det kan vara lämpligt att vi inte rör till det för dem genom att använda olika metoder. Jag avviker något bokens behandling, som jag tror uppfattas som svår. I första hand, gör på samma sätt som jag; om ni avviker, så var åtminstone medvetna om att jag gjort annorlunda på föreläsningen.

Jag använder konsekvent att $u = \arcsin x$ är ekvivalent med $\sin u = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ osv. och inför beteckningar för arcsin osv. och räknar på trigfunktionssidan. Jag visar ett par exempel:

1. *Förenkla* $\arcsin \frac{4}{5} - \arctan \frac{1}{7}$.

   Lösning: vi inför $u = \arcsin \frac{4}{5}$ och $v = \arctan \frac{1}{7}$. Det är då klart att både u och v ligger i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Uppgiften är att beräkna $u - v$, som alltså kommer att ligga i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   Vi ser ur en rätvinklig triangel med sidorna $3, 4, 5$ att $\tan u = \frac{4}{3}$, alltså har vi

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 1$$

   Eftersom vi vet att $u - v$ ligger i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ får vi alltså att $\arcsin \frac{4}{5} - \arctan \frac{1}{7} = u - v = \frac{\pi}{4}$.

2 *Lös ekvationen* $\arccos x = \arctan x$

   Lösning: Definiera u genom $u = \arccos x = \arctan x$. Det följer av definitionerna att u ligger i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. (Detta förutsätter att det finns någon lösning ö.h.t. men det ser man enkelt i ett diagram – alternativt ”satsen om mellanliggande värden”, men dit har vi ju inte kommit ännu.)

Vi har alltså $x = \cos u$ och $x = \tan u$. Vi söker nu u:

$$\cos u = \tan u \Leftrightarrow \cos^2 u = \sin u \Leftrightarrow 1 - \sin^2 u = \sin u \Leftrightarrow \sin u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nu ligger emellertid u i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$, så vi måste ha $\sin u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Nu får vi

$$x = \cos u = [\text{se ovan}] = \sqrt{\sin u} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

På det här sättet återför man räkningarna till de mer bekanta trigonometriska funktionerna.

Harald