

Ordentligt redovisade lösningar fordras. Varje uppgift ges 0–2 poäng. För 1 bonuspoäng fordras 7p, för 2 bonus 10p.

1. Visa med induktion att $4^n - 1$ är jämt delbart med 3 för alla heltal $n \geq 1$.
2. Visa med hjälp av binomialsatsen att $4^n - 1$ är jämt delbart med 3 för alla heltal $n \geq 1$.
3. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right) = 2 \arctan x$$

i intervallet $0 < x < 2/3$.

4. Vi definierar funktionen $f(x)$ genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(0)$.

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1 + 2x}}{x - \ln(1 + x)}$$

6. Funktionen $y = y(x)$ definieras för $-1 < x < 1$ genom

$$y + (1 + x) \ln(1 + y) = \arcsin x$$

Verifiera att $y(0) = 0$, och bestäm derivatan $y'(0)$.