Institutionen för Matematik
KTH

Lösningsförslag till
Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 1
för M, BD, P och T (kurskod 5B1132) samt IT (kurskod 5B1140)
Den 16 december 2003 kl 08.00-13.00

1. Lös nedanstående ekvationssystem (obs: det har oändligt många lösningar).

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 5x + y + z = 9 \end{cases}$$

Lösning: Vi byter plats på första och andra raden, skriver ekvationssystemet på matrisform och använder Gausselimination. Vi får:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där vi ser lösningen $z = t$, $y = 2/3 - t$, $x = 3 - 2t - 2(2/3 - t) = 5/3$.
Svar:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} - t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

---

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller de båda linjerna $p(t) = (2 + t,\, 1 + t,\, -t)$ och $r(s) = (1,\, -3s,\, 1 + 2s)$.

Lösning: Linjerna skär varandra om och endast om $p(t) = r(s)$ för några värden på t och s vilket gäller om och endast om $t = -1$ och $s = 0$. Linjerna har alltså exakt en skärningspunkt, dvs $(1, 0, 1)$. För att få en normalvektor n till planet tar vi vektorprodukten av riktningsvektorerna för de båda linjerna, dvs

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Planets ekvation blir alltså $-x-2y-3z+d=0$ för något tal d och om ekvationen ska vara uppfylld då $(x,y,z)=(1,0,1)$ måste vi ta $d=4$. Planets ekvation blir alltså $-x-2y-3z+4=0$, vilket man (om man vill) också kan skriva $x+2y+3z=4$

Svar: $x+2y+3z=4$.

---

3. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y=\dfrac{(4x+2)e^{x-1}}{x^2+1}$ i punkten $(1,3)$.

Lösning: Vi deriverar och får att

$$y'(x)=\frac{(4e^{x-1}+(4x+2)e^{x-1})(x^2+1)-2x(4x+2)e^{x-1}}{(x^2+1)^2},$$

vilket ger att $y'(1)=2$. Därför måste tangenten ges av en ekvation $y=2x+m$ för något tal m. Denna ekvation är uppfylld för $(x,y)=(1,3)$ om och endast om $m=1$. Tangentens ekvation blir alltså $y=2x+1$.

Svar: $y=2x+1$

---

4. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\cos 4x-2}{x\sin x}$.

Lösning: Eftersom $\cos t=1-t^2/2+\mathcal{O}(t^4)$ så får vi att $\cos 2x=1-2x^2+\mathcal{O}(x^4)$ och $\cos 4x=1-8x^2+\mathcal{O}(x^4)$. Vi har också att $\sin x=x+\mathcal{O}(x^3)$. Allt detta ger oss att:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\cos 4x-2}{x\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2+\mathcal{O}(x^4)+1-8x^2+\mathcal{O}(x^4)-2}{x(x+\mathcal{O}(x^3))}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-10x^2+\mathcal{O}(x^4)}{x^2+\mathcal{O}(x^4)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-10+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^2)}\\&=-10.\end{aligned}$$

En alternativ lösning med L'Hôspitals regel ser ut så här:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\cos 4x-2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x-4\sin 4x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x-16\cos 4x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-10.$$

Svar: -10

---

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_4^6 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$.

Lösning: Vi partialbråksuppdelar integranden. Först ser vi att $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$, så vi söker tal A och B sådana att

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}.$$

Om vi gör liknämigt i högerledet och jämför koefficienterna i polynomen i täljarna får vi ekvationssystemet $A+B=3$, $-A-3B=-5$ med lösning $A=2$, $B=1$. Därför är

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1},$$

och om vi sätter in detta i vår integral får vi

$$\begin{aligned}\int_4^6 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx &= \int_4^6 \left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}\right)\,dx\\ &= \left[2\ln(x-3)+\ln(x-1)\right]_4^6\\ &= \ln 3+\ln 5\\ &= \ln 15.\end{aligned}$$

Svar: $\ln 15$

---

6. Finn alla lokala extrempunkter (och bestäm deras typ) till funktionen $f(x)=x-2\ln(3+x^2)$.

Lösning: Eftersom $3+x^2>0$ för alla x så är definitionsmängden till den här funktionen hela reella axeln. Vi deriverar och får att

$$f'(x)=1-2\frac{2x}{3+x^2}=\frac{3+x^2-4x}{3+x^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{3+x^2}$$

som existerar för alla x. Lokala extrempunkter kan därför bara finnas där derivatan är noll. Vi ser att $f'(x)=0$ om och endast om $x=1$ eller $x=3$. Dessa punkter är alltså de enda punkter som kan vara lokala extrempunkter.

Vi deriverar nu en andra gång och får

$$f''(x)=-2\frac{2(3+x^2)-(2x)^2}{(3+x^2)^2}.$$

Nu ser vi att $f''(1) = -1/2 < 0$ vilket, eftersom vi redan vet att $f'(0) = 0$, betyder att $f(x)$ har ett lokalt maximum när $x = 1$. Funktionsvärdet i punkten är $f(1) = 1 - 2\ln 4$.

Vidare ser vi att $f''(3) = 1/6 > 0$ vilket, eftersom vi redan sett att $f'(3) = 0$, betyder att $f(x)$ har ett lokalt minimum när $x = 3$. Funktonens värde i denna punkt är $f(3) = 3 - 2\ln 12$.

Svar:

Lokalt max när $x = 1$ (funktionsvärdet här är $1 - 2\ln 4$).

Lokalt min när $x = 3$ (funktionsvärdet här är $3 - 2\ln 12$).

---

7. Finn allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen
$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 25\cos x + 1.$

Lösning: Den allmänna lösningen $y(x)$ till den givna differentialekvationen fås som $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där y_p är någon partikulärlösning till den givna ekvationen och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Först söks y_h, dvs allmänna lösningen till $y'' + y' + y/4 = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $k^2 + k + 1/4 = 0$ har den enda lösningen $k = -1/2$, så vi får att $y_h(x) = (Ax + B)e^{-x/2}$, där A och B är godtyckliga reella tal.

Sedan söks y_p. Vi ansätter $y_p = c\cos x + d\sin x + m$. Då är $y_p' = -c\sin x + d\cos x$ och $y_p'' = -c\cos x - d\sin x$ och $y_p'' + y_p' + y_p/4 = (c/4 - c + d)\cos x + (d/4 - d - c)\sin x + m/4$ vilket är lika med högerledet $25\cos x + 1$ om och endast om $c = -12$, $d = 16$ och $m = 4$. Vi har alltså partikulärlösningen $y_p = -12\cos x + 16\sin x + 4$.
Den allmänna lösningen till den i uppgiften givna differentialekvationen är nu

$$y(x) = (Ax + B)e^{-x/2} - 12\cos x + 16\sin x + 4,$$

där A och B är godtyckliga reella konstanter.

Svar: $y(x) = (Ax + B)e^{-x/2} - 12\cos x + 16\sin x + 4$.

---

8. För matriserna A och B gäller att $ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm $AB^{-1}A^{-1}$.

Lösning: Vi har att $AB^{-1}A^{-1} = (ABA^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Vi söker denna invers som lösningen X till $(ABA^{-1})X = E$ med hjälp av Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser att lösningen är $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Svar: $AB^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

9. Sambandet $1 + y + e^{y-2} = 5e^{1-x} - x$ definierar y som en oändligt många gånger deriverbar funktion $y = y(x)$. Uppenbarligen är $y(1) = 2$. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $x = 1$ för funktionen y.

Lösning: Kalla det sökta Taylorpolynomet för $p(x)$. Detta har då utseendet

$$p(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2,$$

så för att bestämma Taylorpolynomet behöver vi värdet, derivatan och andraderivatan av funktionen $y(x)$ i punkten $x = 1$.

Vi vet redan att $y(1) = 2$. Nu deriverar vi ekvationen $1 + y + e^{y-2} = 5e^{1-x} - x$ implicit och får att

$$y'(x) + e^{y-2}y'(x) = -5e^{1-x} - 1,$$

vilket för $(x, y) = (1, 2)$ ger oss att $2y'(1) = -5 - 1$, dvs $y'(1) = -3$.
Vi deriverar nu en gång till och får att

$$y''(x) + e^{y-2}(y'(x))^2 + e^{y-2}y''(x) = 5e^{1-x},$$

vilket för $(x, y) = (1, 2)$ ger oss att $y''(1) + 9 + y''(1) = 5$, dvs $y''(1) = -2$.
Nu vet vi att $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$ och $y''(1) = -2$ och kan bilda Taylorpolynomet: $p(x) = 2 - 3(x - 1) - (x - 1)^2$.
Svar: $2 - 3(x - 1) - (x - 1)^2$

---

10. En motorcykelförare ska köra en sträcka om 161 km från en punkt A till en punkt B genom svårgenomtränglig terräng. Framkomligheten varierar, så hon kan inte räkna med att hålla samma hastighet hela tiden. Hon kalkylerar med att hålla en hastighet v som varierar enligt formeln $v(x) = 3\sqrt{x + 64}$ km/h, där x är avståndet från startpunkten A. Beräkna den totala körtiden. (*Ledning: Man kan t ex dela upp sträckan i småbitar.*)

Lösning: Sträckan delas in i småbitar av längd Δx. På den lilla delsträckan från punkten x till $x + \Delta x$ är hastigheten ungefär konstant lika med $3\sqrt{x + 64}$ km/h. Det betyder att körtiden för denna lilla delsträcka är ungefär $\dfrac{\Delta x}{3\sqrt{x + 64}}$ timmar. Ungefärlig total körtid blir då summan av de approximativa körtiderna för alla sådana små delsträckor. Låter vi Δx gå mot noll konvergerar summan mot en integral som ger totala körtiden, nämligen

$$\int_0^{161} \frac{1}{3\sqrt{x + 64}} dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x + 64}\right]_0^{161} = \frac{2}{3}(\sqrt{225} - \sqrt{64}) = \frac{14}{3}.$$

Den totala körtiden blir alltså 14/3 timmar, dvs 4 timmar och 40 minuter.
Svar: 4 timmar och 40 minuter.