Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 3 den 31/10

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Version A

1. Derivera funktionen $\ln\sqrt{\cos x}$ (endast svar krävs).

Svar: Derivatan är (upprepad användning av kedjeregeln): $-\dfrac{\sin x}{2\cos x}$.

---

2. Bevisa med induktion att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för alla positiva heltal n.

Lösning: Låt P vara påståendet att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3. Vi ska visa med induktion att P är sant för alla positiva heltal n. Steg 1: Om $n = 1$ säger påståendet P att $4^1 - 1$ är jämnt delbart med 3 vilket är sant. Steg 2: Antag att P är sant för något heltal n_0, dvs antag att $4^{n_0} - 1$ är jämnt delbart med 3. Vi ska visa att i så fall är P också sant för $n = n_0 + 1$, dvs att $4^{n_0+1} - 1$ är jämnt delbart med 3. Nu är $4^{n_0+1} - 1 = 4 \cdot 4^{n_0} - 1 = 4 \cdot (4^{n_0} - 1) + 3$, som måste vara jämnt delbart med 3 eftersom båda termerna är det: parentesen är det enligt vårt antagande och 3:an är det uppenbart. Steg 3: Det följer med induktion att P är sant för alla positiva heltal n.

---

3. Låt funktionen f vara given enligt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\sin x, & \text{då } x < 0 \\ 1/2, & \text{då } x = 0 \\ \arctan\dfrac{1}{x}, & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?

Lösning: För alla $x < 0$ är $f(x) = (\sin x)/2x$ som är ett elementärt uttryck definierat för alla x i intervallet. Alltså är f kontinuerlig i alla punkter $x < 0$. För alla $x > 0$ är $f(x) = \arctan(1/x)$ som är ett elementärt uttryck definierat för alla x i intervallet. Alltså är f kontinuerlig i alla punkter $x > 0$. Återstår den enda punkten $x = 0$. Här gäller att f är kontinuerlig om och endast om $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, vilket särskilt betyder att både höger- och vänstergränsvärdet i origo ska vara lika med $f(0)$. Men $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(1/x) = \pi/2$ medan $f(0) = 1/2$. Eftersom dessa inte är lika så är funktionen inte kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Svar: f är kontinuerlig i alla punkter $x \neq 0$.