Lösningsförslag till Lappskrivning 2 i 5B1121 Matematik baskurs
22 september 2006 kl 13.15-14.15

1. **Finn alla rella tal x sådana att $\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln(x+3)$.**

Lösning: Vi observerar att ekvationen bara är väldefinierad då $x > -1$ eftersom logaritmen ej är definierad för negativa tal. För $x > 1$ har vi att $\ln(x+1)+\ln(x+2) = \ln(x+3)$ om och endast om $e^{\ln(x+1)+\ln(x+2)} = e^{\ln(x+3)}$ vilket är detsamma som att $(x+1)(x+2) = x+3$ dvs $x^2+2x-1=0$. Denna andragradare löser vi med pq-formeln och den har lösningarna $x = -1 \pm \sqrt{2}$, varav bara $-1+\sqrt{2}$ ligger i det tillåtna intervallet $x > -1$.

Svar: $x = -1+\sqrt{2}$

2. **Bestäm den konstanta termen (den som inte innehåller x) i utvecklingen av $\left(x - \frac{1}{2x^3}\right)^{12}$. Förkorta svaret så långt möjligt.**

Lösning: Vi använder binomialformeln och får att

$$\left(x - \frac{1}{2x^3}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k \left(-\frac{1}{2x^3}\right)^{12-k}.$$

Den konstanta termen fås när $k=9$ och denna term blir då

$$\binom{12}{9} x^9 \left(-\frac{1}{2x^3}\right)^{12-9} = -\frac{55}{2}.$$

Svar: -55/2

3. **Låt $f(x) = e^{\sqrt{3x-1}}$. Bestäm, om möjligt, inversen till f och ange inversens definitions- och värdemängd.**

Lösning: Vi ser direkt att $D_f = [1/3, \infty)$ och $V_f = [1, \infty)$. Vi söker inversen genom att sätta $y = e^{\sqrt{3x-1}}$ och lösa ut x. Under förutsättningen att $x \geq 1/3$ och $y \geq 1$ gäller följande ekvivalenser:

$$y = e^{\sqrt{3x-1}} \Leftrightarrow \ln y = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow (\ln y)^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{(\ln y)^2 + 1}{3} = x.$$

Inversen är alltså $f^{-1}(y) = \frac{(\ln y)^2+1}{3}$ eller, om vi hellre vill använda x som variabel, $f^{-1}(x) = \frac{(\ln x)^2+1}{3}$. Definitions- och värdemängd är $D_{f^{-1}} = V_f = [1, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = D_f = [1/3, \infty)$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{(\ln x)^2+1}{3}$. $D_{f^{-1}} = [1, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = [1/3, \infty)$