Lösningsförslag till Lappskrivning 1 i 5B1121 Matematik baskurs
12 september 2006 kl 13.15-14.15

1. Låt L vara den räta linje som passerar genom punkterna $(1,3)$ och $(-2,4)$. Bestäm en ekvation för den räta linje som är parallell med L och som passerar genom punken $(3,-5)$.

Lösning: Riktningskoefficienten för L fås som $\Delta y/\Delta x = (4-3)/(-2-1) = -1/3$. Den sökta linjen måste, om den ska vara parallell med L, ha samma riktningskoefficient. Det betyder att den sökta linjen har en ekvation på formen $y = -\frac{1}{3}x + m$ för något tal m. Om linjen ska passera genom $(3,-5)$ måste $-5 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + m$ varur fås att $m = -4$.

Svar alltså: $y = -\frac{1}{3}x - 4$

2. Faktorisera, om möjligt, polynomet $p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ i förstagradsfaktorer.

Lösning: Vi ser direkt att $x = 1$ är ett nollställe till polynomet. Faktorsatsen ger att $p(x)$ är jämnt delbart med $x-1$. Utförs divistionen fås att $p(x)/(x-1) = x^2+4x-5$ dvs $p(x) = (x-1)(x^2+4x-5)$. Den andra faktorns nollställen fås med "pq-formeln" som $x = 1$ och $x = -5$. Faktorsatsen ger då att $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$. Sammantaget får vi faktoriseringen $p(x) = (x-1)^2(x+5)$.

SVar: $p(x) = (x-1)^2(x+5)$.

3. Finn alla reella tal x som uppfyller att $\dfrac{|x-2|}{x-1} \geq 2$.

Lösning: Vi ser direkt att för $x < 1$ är vänsterledet negativt och kan inte vara större än eller lika med 2. Olikheten har alltså inga lösningar i det intervallet. Vänsterledet är inte definierat för $x = 1$. Alla eventuella lösningar finns därför i intervallet $x > 1$. För sådana x är $x - 1$ positivt och vi kan multiplicera båda sidor av olikheten med detta uttryck och få $|x-2| \geq 2x-2$. Om $x \geq 2$ är detta ekvivalent med $x-2 \geq 2x-2$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $0 \geq x$ vilket är oförenligt med att $x \geq 2$. Inga lösningar i intervallet $x \geq 2$ alltså. Om $x < 2$ får vi istället $2 - x \geq 2x - 2$ vilket är ekvivalent med att $4 \geq 3x$ dvs $4/3 \geq x$. Här får vi alltså lösningarna $1 < x \leq 4/3$.

Svar: $1 < x \leq 4/3$.