KTH Matematik

Kontrollskrivning 4
5B1118 Diskret Matematik
2 maj, 2006

- tid:**10:15-11:15**
- Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Inga böker/anteckningar får användas.
- **Allt ska motiveras.** Ett svar utan förklaring är värd 0 poäng!
- Minst 3 poäng krävs för godkänt.

(1) (3 p.) Betrakta polynomet $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ på $\mathbb{Z}_5$. Faktorisera polynomet som en produkt av oreducerbara polynom.

Observera att polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ har bara [3] som nollställe i $\mathbb{Z}_5$, för att $f(3) = 0, f(0) = [2], f(1) = [4], f(2) = [3], f(4) = [1]$. Då är $(x - 3)$ den enda oreducerbar faktor av grad 1.

Det följer att $f(x)$ ska skrivas som:

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = (x - 3)(x^2 + Ax + B).$$

därför är:

$$\begin{array}{ccc} A - 3 & \equiv_5 & -2 \\ B - 3A & \equiv_5 & 3 \\ 3A & \equiv_5 & 2 \end{array}$$

och $A = [1], B = [1]$. Så är $f(x) = (x-3)(x^2+x+1)$.
(a)

(2) (3 p.) Låt G vara en graf med incidensmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rita grafen G. Har G en Eulerväg? Är G Eulersk? G har 6 noder av grad $4, 2, 3, 2, 3, 2$ (summas av ettorna i varje rad). Eftersom inte varje nod har jämn grad är Grafen inte Eulersk. Men eftersom bara 2 noder har odda grad har grafen en Eulerväg.

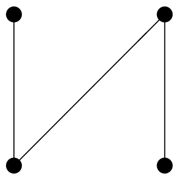
(3) (3 p.) Låt G vara en graf med 4 noder, som är isomorf till sitt komplement.

(a) Hur många kanter har G?
Låt $G = (X, V)$ vara en graf med 4 noder och $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ vara komplementen.
Då är $|E| + |\overline{E}| = \binom{4}{2} = 6$. Om grafer G och $\overline{G}$ är isomorfa måste $|E| = |\overline{E}|$ och då är $|E| = 3$.
Dessutom ska $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| = 6$.

(b) Rita en sådan graf (med 4 noder, som är isomorf till sitt komplement.)
Det finns faktiskt bara en sådan graf: Eftersom varje nod x i G och motsvarande (genom isomorfin) nod x' i $\overline{G}$ har samma grad är $deg(x)+deg(x') = 3$ (eftersom varje nod i K_4 har grad 3 och unionen av kanter from x och from x' ska vara lika med alla kanter från motsvarande nod i K_4)
Om G hade en isolerad nod x, i.e. $deg(x) = 0$ då skulle G bestå av x och en 3-cykel, där alla noderna har grad 2. Men då har $\overline{G}$ en nod x' med grad 3 och är inte isomorf till G. Det följer att

alla noderna i G har grad > 0. På liknande sätt ser man att G kan inte ha en nod av grad 3.
Det betyder att G kan ha 4 noder av grad $(1, 1, 2, 2)$

G:



$\overline{G}$: