KTH Matematik

Kontrollskrivning 3
5B1118 Diskret Matematik
24 April, 2006

(1) (3 p.) Bestäm den multiplikativ invers av [22] i $\mathbb{Z}_{105}$.

Eftersom dem är relativt prima Euklids divisions algoritm ger:

$$1 = 22 \cdot 43 - 9 \cdot 105$$

Det betyder att $22 \cdot 43 \cong_{105} 1$ och därför är [43] den multiplikativ invers av [22].

(2) (3 p.) Betrakta mängden:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \text{-b} & \mathrm{a} \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

Låt $\cdot$ vara den vanlig matrismultiplikation. Visa att $(G, \cdot)$ är en grupp. Multiplicationen är en binär operation eftersom

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \text{-b}_1 & \mathrm{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \\ \text{-b}_2 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 a_2 - b_1 b_2 & \mathrm{a}_1 b_2 + a_2 b_1 \\ \text{-}(\mathrm{a}_1 b_2 + a_2 b_1) & \mathrm{a}_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

Matrismultiplicationen är associativ.

Identiten $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$

Eftersom för varje $A \in G$ är $det(A) = a^2 + b^2$ och $a > 0$ är $det(A) \neq 0$ och alla element av G inverterbara.

(3) (3 p.) Låt $\sigma = [15683427] \in \mathcal{S}_8$. Låt $< \sigma >$ vara den cyklisk delgrupp av $\mathcal{S}_8$, genererad av σ. Hur många element har $< \sigma >$?

Antalet element är lika med $ord(\sigma)$. Eftersom $\sigma = (1)(2536487)$ är $ord(\sigma) = 7$. Då är svaret 7.